慶應義塾大学　環境情報学科　2019

I

$\alpha=\cos\theta_1$, $\beta=\cos\theta_2$ とする。

このとき $-1\le\alpha\le1$, $-1\le\beta\le1$ である。

ここで

$$x=\cos\theta_1+\cos\theta_2=\alpha+\beta$$

$$y=\cos2\theta_1+\cos2\theta_2$$

$$=2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2-1)$$

$$=2\left((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-1\right)$$ である

$$\therefore\ \begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha\beta=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}\end{cases}$$ となる

ここで、$X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta=0$ —(*) の解が $X=\alpha,\beta$ となるため、

(*)が $-1\le X\le1$ に重解をこめ2つの解をもつ範囲を求めればよい

(*)の左辺を $f(x)$ とおくと

$Y=f(x)$ のグラフが $-1\le x\le1$ の範囲で

x軸と2つ共有点をもつか、接すれば良いと分かる。

このため、

・(*)の判別式 $D\ge0$ より

$$x^2-4\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}\right)\ge0\qquad\therefore\ \underline{y\ge x^2-2}$$

・$Y=f(x)$ の軸が $-1\le x\le1$ の領域に含まれるため

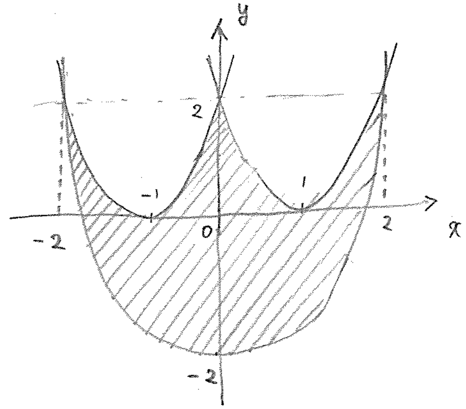
$$-1\le\frac{x}{2}\le1\qquad\therefore\ \underline{-2\le x\le2}$$

・$f(1)\ge0$, $f(-1)\ge0$ より

$$f(1)=1-x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}\right)\ge0\qquad\therefore\ \underline{y\le2x^2-4x+2}$$

$$f(-1)=1+x+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}\right)\ge0\qquad\therefore\ \underline{y\le2x^2+4x+2}$$

(2) 領域は下の斜線部分



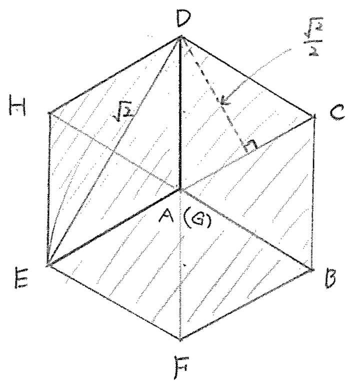
よってその面積 S は

$$S=\frac{1}{6}(2-(-2))^3-\frac{2}{6}(2-0)^3-\frac{2}{6}(0-(-2))^3=\underline{\frac{16}{3}}$$

慶早進学塾

II

立方体の影は下のようになる



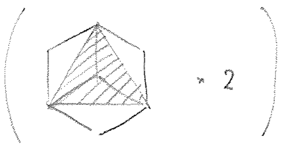
これは正6角形である

また、ED ⊥ AG であることに注意すると

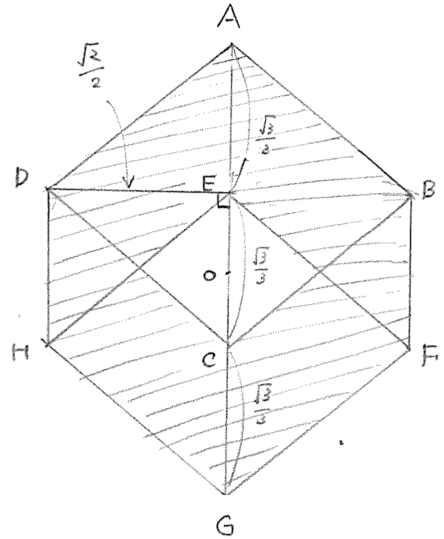
ED の影も $\sqrt{2}$ であることが分かる

このことから影の面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \sin\frac{\pi}{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$$ と分かる



また、90°回転させると影は下のようになる

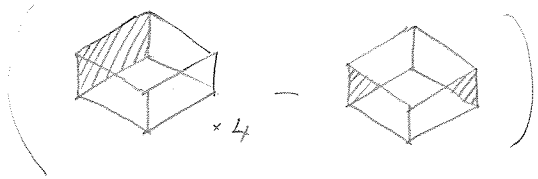


AG の影の長さが $\sqrt{3}$、AE, EC, CG の影の長さは $\frac{\sqrt{3}}{3}$

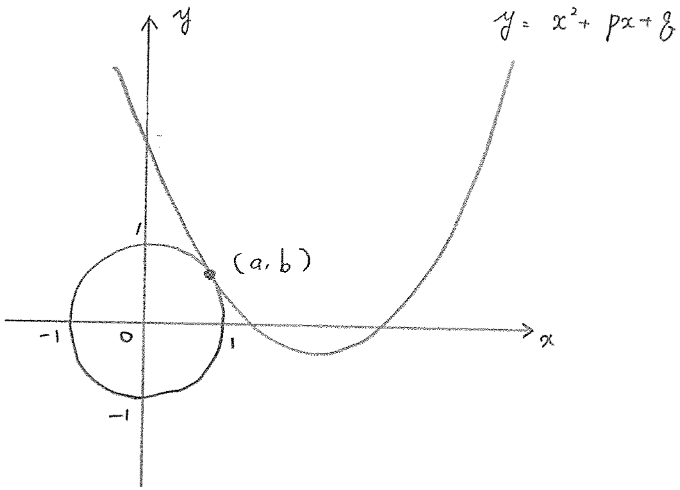
ED の影の長さが $\frac{\sqrt{2}}{2}$ となることなどが分かる

このため、面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{7\sqrt{6}}{12}$$



III



条件より 点Pは 単位円周上 かつ 第1象限 の点であり

$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である

このことから $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である

Pは $y = x^2 + px + q$ 上の点であり

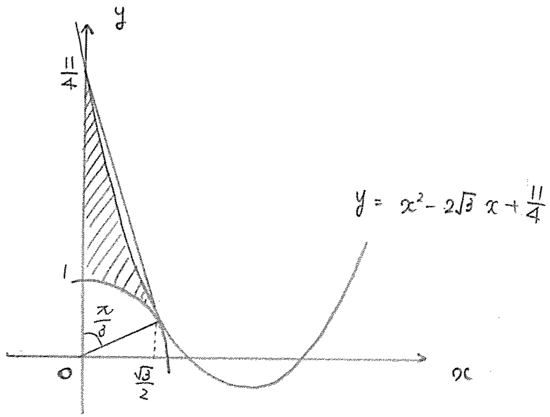
また 点Pにおいて $x^2 + y^2 = 1$ と $y = x^2 + px + q$ の

接線の傾きが一致する

このことから

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + q \\ -\sqrt{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + p \end{cases}$$

$\therefore\ p = -2\sqrt{3}, \quad q = \frac{11}{4}$

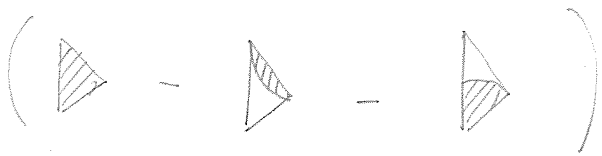


求める面積は上の斜線部分である

このため

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{6}\pi$$



IV

(1)

6桁の数であるため、2^5の位は必ず1である。

よって残りの$2^4 \sim 2^0$の位に1が2つ使われれば良い

このような数は $_5C_2 = \underline{10}$ 個存在する

(2)

2^9の位の数は必ず1である

よって(1)と同様に考えると、このような数は

$_9C_3 = 84$ 個存在する

ここで $0 \leq i \leq 8$ について

(2)の条件を満たし、かつ2^iの位が1である数は、それぞれ

$_8C_2 = 28$ 個存在する

以上のことから、このような数の総和を

各位について和を求めていくことで求めると、

$$84 \cdot 2^9 + 28(2^8 + \cdots + 2^0) = \underline{57316}$$

(3) $1000 = 1111101000_{(2)}$ である。

このため2進法表記で1が4つ使われ、かつ10桁となるものは

必ず1000以下であると分かる。

よって2進法表記で1が4つ使われ、10桁以下となる

数の個数を求めれば良い。

このような数は必要であれば先頭に0をつけ加えることで

10桁の数とみなせる。

よって$2^9 \sim 2^0$の位のうち、1が4つ使われる数を求めれば良い。

このような数は $_{10}C_4 = \underline{210}$ 個ある

慶早進学塾

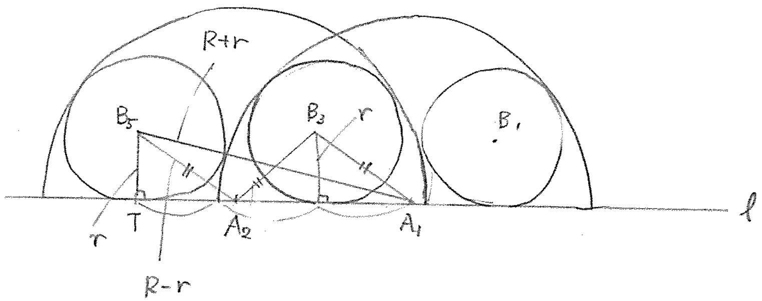
V

正方形の左下と右上とを結ぶ対角線 l を考える

図形はこの直線に関して線対称である

よって A_1, A_2 の中心は l 上にあり

B_1, B_3, B_5 は l に接する



円 A_1, A_2, B_1 ~ B_6, C_1, C_2 の中心をそれぞれ

A_1, A_2, B_1 ~ B_6, C_1, C_2 とする

また l と円 B_5 の接点を T とする。

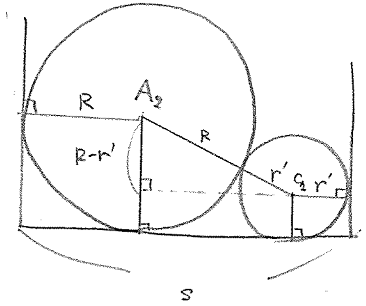
このとき $TA_1 = 3TA_2$ である

$$\therefore \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = 3\sqrt{(R-r)^2 - r^2}$$

整理して

$$R\left(R - \frac{5}{2}r\right) = 0 \qquad \therefore \underline{R = \frac{5}{2}r} \quad (\because R \neq 0)$$

—①

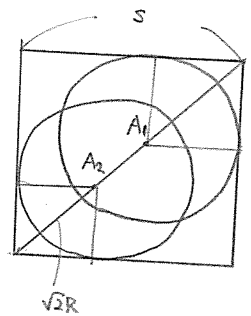


また、

$$s = R + r' + \sqrt{(R+r')^2 - (R-r')^2}$$

$$= \underline{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r'}\right)^2}$$

—②



また、 $A_1A_2 = 2\sqrt{(R-r)^2 - r^2} = \sqrt{5}\,r$ であるから、

$$2\sqrt{2}R + \sqrt{5}r = \sqrt{2}s$$

$$\therefore s = \frac{10+\sqrt{10}}{2}r \quad (\because ①)$$

—③

よって ①〜③により

$$r' = \left(\sqrt{s} - \sqrt{R}\right)^2$$

$$= s - 2\sqrt{sR} + R$$

$$= \frac{15+\sqrt{10} - 2\sqrt{50+5\sqrt{10}}}{2}\,r$$

VI

(1) $x = 3p(1-q) + q(1-p)$

$= -4pq + 3p + q$

$y = p(1-q) + 3q(1-p)$

$= -4pq + p + 3q$

$\therefore \begin{cases} x+y = 4(p+q) - 8pq \\ x-y = 2(p-q) \end{cases} \quad (0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1)$

このことから

$x+y = 4(p+q) - 2\{(p+q)^2 - (p-q)^2\}$

$= \frac{1}{2}(x-y)^2 - 2\{(p+q-1)^2 - 1\}$

よって $x-y$ を固定したとき

$\begin{cases} p+q = 1 \\ p-q = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$ つまり $\begin{cases} p = \frac{1}{4}(x-y+2) \\ q = \frac{1}{4}(-x+y+2) \end{cases}$

となる点で $x+y$ は最大値 $\frac{1}{2}(x-y)^2 + 2$ をとる

$(\because -2 \leq x-y \leq 2$ のため $0 \leq \frac{1}{4}(\pm x \mp y + 2) \leq 1$ を満たす$)$

このとき (x, y) は曲線 Z 上の点となるため

$x+y = \frac{1}{2}(x-y)^2 + 2$

$\therefore \underline{(x-y)^2 = 2(x+y-2)}$ ―①

(2)

$\begin{cases} s = x+y \\ t = x-y \end{cases}$ とおく $(0 \leq s \leq 2 \quad -1 \leq t \leq 1)$

このとき 曲線 Z は 放物線 $s = \frac{1}{2}t^2 + 2$ にうつり

x軸に平行な直線 $y = k$ は

傾き 1 の直線 $s = t + 2k$ にうつる

これらが接するとき $(t, s) = (1, \frac{5}{2})$ であるため

求める接点は $\underline{(x, y) = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)}$ である

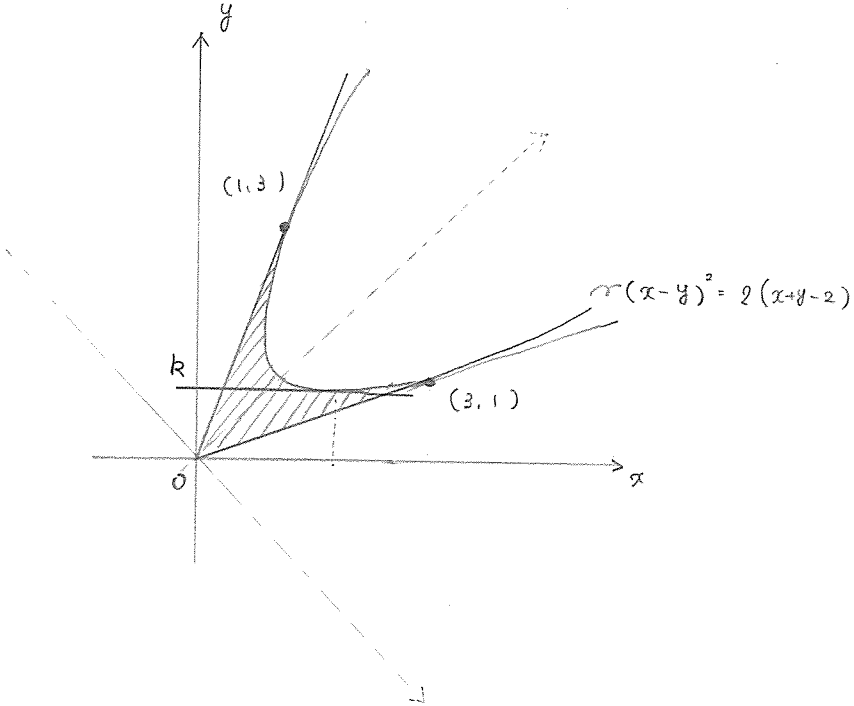
(別) ① を両辺微分すると

$2(x-y)(1-y') = 2(1+y')$

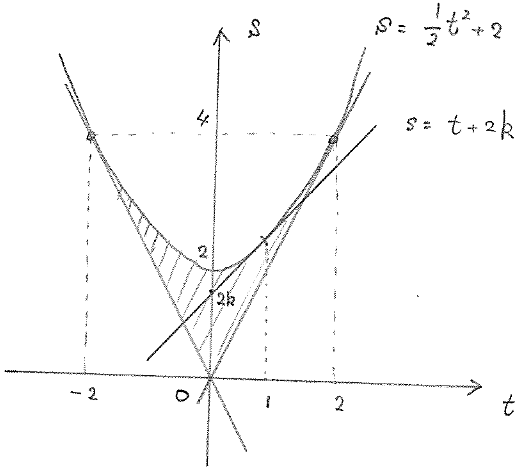
接点では $y' = 0$ より $x-y = 1$

また, このとき ① より $x+y = \frac{5}{2}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$



y
(1, 3)
$(x-y)^2 = 2(x+y-2)$
k
(3, 1)
O
x



s
$s = \frac{1}{2}t^2 + 2$
4
$s = t + 2k$
2
2k
−2
0
1
2
t