慶應義塾大学 経済学部 2019

[1]

(1) 円Cの中心がx軸上にあるとき 中心は $(3, 0)$

このとき OP が円Cの直径のため $\angle OQP = \frac{\pi}{2}$

(2) 円Cの中心は $(3, y)$ とおける。 $(y>0)$

半径が $2\sqrt{3}$ より $\sqrt{3^2+y^2} = 2\sqrt{3}$ $\therefore y = \sqrt{3}$ $(\because y>0)$

このとき $\triangle OPQ$ が正三角形となることに注意すると

$Q(3, 3\sqrt{3})$ とわかる。

(3)

$\angle OQP = \frac{5}{12}\pi$, $\angle OPQ = \frac{\pi}{3}$ であるから

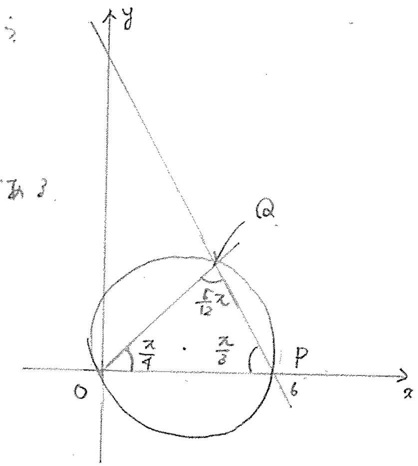
$\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ とわかる

このため Q は l と $y=x$ との交点である

よって Q のy座標を y とすると

$y = -\sqrt{3}y + 6\sqrt{3}$

$\therefore y = 9 - 3\sqrt{3}$



(4) $\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

よって $\triangle OPQ$ に対して正弦定理により

円Cの半径Rは

$R = \frac{OP}{2\sin\angle OQP}$

$= \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$= 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

[2]

(1) 赤または黄の玉が出る確率は $\frac{1}{4}$

黒または白の玉が出る確率は $\frac{3}{4}$ である

このため求める確率は

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{8}}$$

(2) 1回の試行で赤玉が出る確率を p

黄玉が出る確率を q とする

このとき (a), (b) から,

$$\begin{cases} p+q = \frac{1}{4} \\ 2pq = \frac{1}{36} \end{cases}$$ である.

このため, 求める確率は

$$p^3+q^3 = (p+q)^3 - 3pq(p+q)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{192}}$$

(3) 黒の球が x 個, 白の球が y 個入っていたとする.

すると, (a), (b) より

$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{24} + \frac{y}{24} = \frac{1}{4} \\ {}_3C_2 \left(\frac{x}{24}\right)^2\left(\frac{y}{24}\right) = \frac{49}{288} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x+y = 18 & \text{—①} \\ x^2y = 2^4 \cdot 7^2 & \text{—②} \end{cases}$$

x, y は非負整数であることから, ② より

$(x, y) = (1, 784), (2, 196), (4, 49)$

$(7, 16), (14, 4), (28, 1)$ のいずれかである.

このうち, ① を満たすものは $(x, y) = (14, 4)$.

よって <u>黒球は 14 個 白玉は 4 個である</u>

(4) 白玉が出る確率は $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ である.

このため求める確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \underline{\frac{25}{216}}$$

[3]

$$\begin{cases} a_{2m} = a_{2m-1} + 2m+1 \\ a_{2m+1} = r\,a_{2m} \end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

(1) 漸化式により

$$a_2 = r+3,\quad a_3 = r^2+3r \quad a_4 = r^2+3r+5$$

(2) $b_m = a_{2m-1}$ とする。このとき 初項 $b_1 = a_1 = r$

漸化式は

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= a_{2m+1} \\ &= r\,a_{2m} \\ &= r(a_{2m-1}+2m+1) \\ &= r(b_m+2m+1) \quad (m=1,2,\ldots) \end{aligned}$$

$c_m = \dfrac{b_m}{r^m}$ とする。このとき 初項 $c_1 = \dfrac{b_1}{r^1} = 1$

$$\begin{aligned} d_k &= c_{k+1} - c_k \\ &= \frac{b_{k+1}}{r^{k+1}} - \frac{b_k}{r^k} \\ &= \frac{1}{r^k}\left(\frac{1}{r}b_{k+1} - b_k\right) \\ &= \frac{2k+1}{r^k} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \because \{b_m\} \text{の漸化式より} \\ \frac{1}{r}b_{k+1} = b_k + 2k+1 \end{array}\right)$$

である。

このため、$m \geqq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} c_m &= c_1 + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{r^k}(2k+1) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \frac{2l-1}{r^{l-1}} \end{aligned}$$

$l = k+1$ でおきかえ

また、$\dfrac{1}{r}c_m = \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{r^l}(2l-1) = \sum_{l=2}^{m+1} \frac{1}{r^{l-1}}(2l-3)$ である。

このことから

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{r}\right)c_m &= 1 + \sum_{l=2}^{m} \frac{2}{r^{l-1}} - \frac{1}{r^m}(2m-1) \\ &= -1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{2}{r^{l-1}} - \frac{2m-1}{r^m} \end{aligned}$$

$$\therefore\ 1 + \left(1-\frac{1}{r}\right)c_m = \sum_{l=1}^{m} \frac{2}{r^{l-1}} - \frac{2m-1}{r^m}$$

$$\therefore\ \left(1-\frac{1}{r}\right)c_m = 2\cdot\frac{1-\frac{1}{r^m}}{1-\frac{1}{r}} - \frac{2m-1}{r^m} - 1$$

$$\frac{r-1}{r}c_m = \frac{2(r^m-1)}{r^{m-1}(r-1)} - \frac{2m-1}{r^m} - 1$$

$$\therefore\ c_m = \frac{2(r^m-1)}{r^{m-2}(r-1)^2} - \frac{2m-1}{r^{m-1}(r-1)} - \frac{r}{r-1}$$

これは $m=1$ としても成立する

慶早進学塾

(3) $m \geqq 1$ に対して.

$$a_{2m-1} = r^m c_m$$

$$= \frac{r^m}{(r-1)^2}\left\{\frac{2(r^m-1)}{r^{m-2}} - \frac{(2m-1)(r-1)}{r^{m-1}} - r(r-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{(r-1)^2}\left\{2r^2(r^m-1) - (2m-1)r(r-1) - r^{m+1}(r-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{(r-1)^2}\left\{r^{m+2} + r^{m+1} - (2m+1)r^2 + (2m-1)r\right\}$$

$$a_{2m} = \frac{1}{r}a_{2m+1}$$

$$= \frac{1}{r(r-1)^2}\left\{r^{m+3} + r^{m+2} - (2m+3)r^2 + (2m+1)r\right\}$$

$$= \frac{1}{(r-1)^2}\left\{r^{m+2} + r^{m+1} - (2m+3)r + (2m+1)\right\}$$

[4]

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+3} + 5^{z+2} = 1 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} - 5^{z+1} = 1 \end{cases}$$

(1)

$X = 2^x$, $Y = 3^y$, $Z = 5^z$ とそれぞれおく

すると

$$\begin{cases} 27Y + 25Z = 1 - \frac{1}{2}X \\ 3Y - 5Z = 1 - 2X \end{cases}$$ となる。

これを解いて

$$Y = 3^y = \frac{1}{7} - \frac{1}{4}X$$

$$Z = 5^z = -\frac{4}{35} + \frac{1}{4}X$$ を得る。

ここで、$Y > 0$, $Z > 0$ であるから

$$\frac{16}{35} < X < \frac{4}{7}$$ である

辺々底を2とする対数をとることにより、

$$4 - \log_2 5 - \log_2 7 < x < 2 - \log_2 7$$

(2)

$$Y^3 + Z^3 = (Y+Z)^3 - 3YZ(Y+Z)$$

$$= P^3 - 3PQ$$

(3)

(1)の Y, Z について (2)の通り P, Q を定める。

このとき $P = Y + Z = \frac{1}{35}$ (定数) である。

また、(2)より

$$27^y + 125^z = Y^3 + Z^3$$

$$= P(P^2 - 3Q)$$ であったから、

Q が最大となるとき、$27^y + 125^z$ は最小となる

ここで、

$$Q = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4}X\right)\left(-\frac{4}{35} + \frac{1}{4}X\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(X - \frac{18}{35}\right)^2 + \frac{1}{4900}$$ であるから

$\frac{16}{35} < X < \frac{4}{7}$ の範囲では

$X = \frac{18}{35}$ のとき Q が最大となる

このとき $x = 1 + 2\log_2 3 - \log_2 5 - \log_2 7$

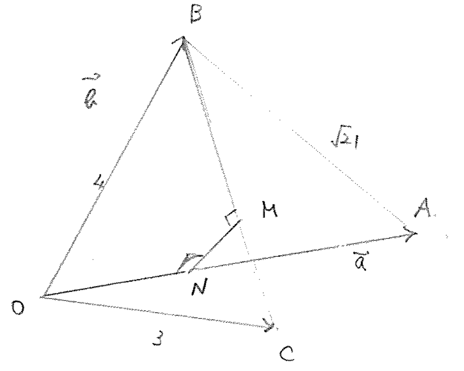
[5]

(1) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{21}$ であることから、

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 21$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(5^2+4^2-21) = \underline{10}$$

(2)



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ である

$\overrightarrow{ON} = s\vec{a}$ とする.

このとき　$MN \perp l_1$ より　$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{a} = 0$

$$\therefore\ \left(s\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

$$= 25s - 10 = 0 \qquad \therefore\ \underline{s = \frac{2}{5}}$$

また、$MN \perp l_2$ より $\overrightarrow{MN}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = 0$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{c})$$

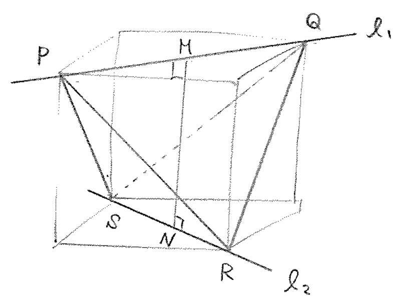
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \qquad \therefore\ \underline{\vec{b}\cdot\vec{c} = 2}$$

(3) $$|\overrightarrow{MN}|^2 = \left|\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}\right|^2$$

$$= \frac{4}{25}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{4}{15}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{8}{15}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$= \underline{\frac{8}{3}}$$

(4) この正四面体を PQRS とする

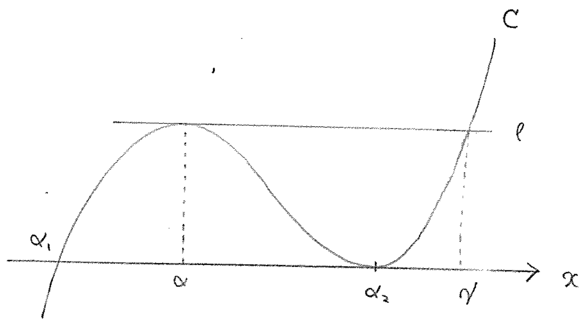


上のように P.Q.R.S を頂点に含むような正六面体を考える

この正六面体の一辺の長さは $|\overrightarrow{MN}|$ に等しいため $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

よって、$\underline{d = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$

[6]



(1) $F(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2$ と表せる.

ここで

$$F'(x) = (x-\alpha_2)^2 + 2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

$$= 3\left(x - \frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}\right)(x-\alpha_2)$$ となる.

よって $F'(x)=0$ のとき $x = \dfrac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}$, α_2 であり

$F(x)$ の増減は次のとおり

x	$\cdots$	$\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}$	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大 $\frac{4}{27}(\alpha_2-\alpha_1)^3$	↘	極小 0	↗

このため $\alpha = \dfrac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}$, $\beta = \alpha_2$

(2) ℓ の式は $y = F(\alpha)$ である.

$(\gamma, F(\gamma))$ が ℓ 上にあるため

$\therefore (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2 = \dfrac{4}{27}(\alpha_2-\alpha_1)^3$

は $x=\gamma,\ \alpha$(重解)を解にもつ.

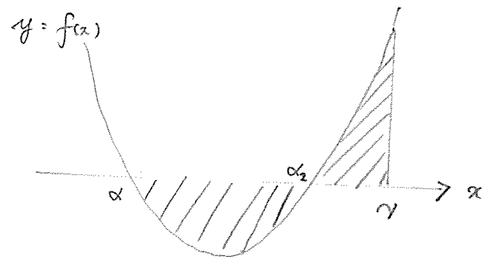
解と係数との関係より $2\alpha+\gamma = 2\alpha_2+\alpha_1$

$$\therefore \gamma = \frac{-\alpha_1+4\alpha_2}{3}$$

また

$$f(\gamma) = 3(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha_2) = (\gamma-\alpha)^2$$

(3) 求める面積は図の斜線部分



$$S = -\int_{\alpha}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\gamma} f(x)\,dx$$

$$= F(\alpha) - F(\alpha_2) + F(\gamma) - F(\alpha_2)$$

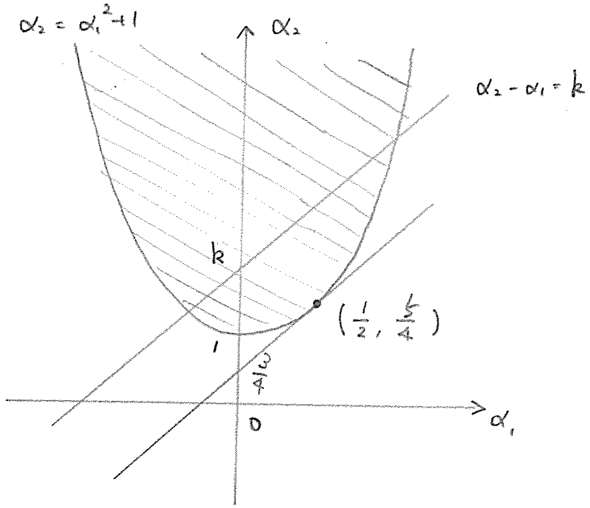
$$= 2F(\alpha) \quad (\because F(\alpha_2)=0,\ F(\gamma)=F(\alpha))$$

$$= \frac{8}{27}(\alpha_2-\alpha_1)^3$$

このため，$\alpha_2-\alpha_1$ が最小となるとき，S も最小となる．

$\alpha_1^2+1 \leq \alpha_2$ のとき 点 (α_1, α_2) の存在しうる領域は

下の斜線部分（ただし境界を含む）



また $\alpha_2-\alpha_1=k$ とおくと これは傾き1，y切片 k の直線を表す

これが上の領域と共有点をもつような k の最小値は

この直線が $\alpha_2=\alpha_1^2+1$ の接線となるときの k である．

このとき $k=\frac{3}{4}$ であり，接点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ である．

以上のことから S は $(\alpha_1, \alpha_2)=\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ のとき

最小値 $T=\frac{8}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^3=\underline{\frac{1}{8}}$ をとる．