[I]

(1)

$$\frac{3+i}{\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{9a^2-6a+1}\,i}$$

$$=\frac{3+i}{|a+1|+|3a-1|\,i}$$

$$=\frac{3+i}{(a+1)-(3a-1)\,i}$$

a は実数であるため これが実数となるとき

$$a+1=-3(3a-1) \qquad \therefore\ \underline{a=\frac{1}{5}}$$

(2)

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{a} \\ \sqrt[6]{(a^3)^4 \times a^2 \div a^5} < 24\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 < a \\ a < 12 \end{cases}$$

a は自然数のため　$a=10,\ 11$

(3) $\{a_n\}$ は初項 2 公差 1 の等差数列であるから.

一般項は　$a_n = n+1$

$\therefore\ b_{n+1} = b_n + n+1$　となる

数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

このため

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\underline{\frac{2n}{n+1}}$$

(4) $15x + 14y + 24z = 266$

(i) $k = 5x + 8z$ とする.

このとき $14y + 3k = 266$

$\therefore\ y = -\dfrac{3}{14}k + 19$

(ii) $x,\ z$ が正の整数であるとき,

k も正の整数となる.

このため,

$(y,\ k) = (16,\ 14),\ (13,\ 28),\ (10,\ 42)$

$(7,\ 56),\ (4,\ 70),\ (1,\ 84)$ となる.

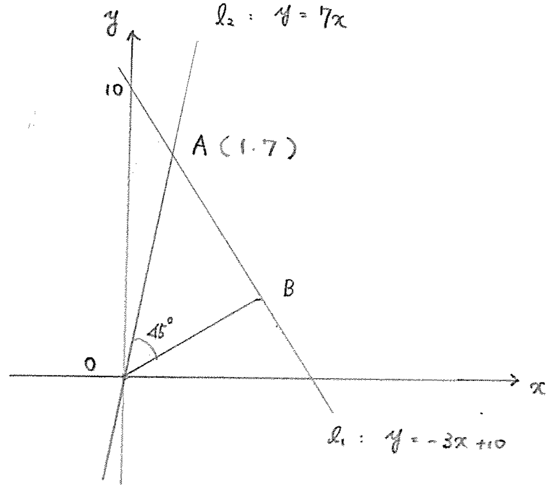
それぞれに対して $k = 5x + 8z$ を満たす

正の整数 $x,\ z$ の組を考えると

$(x,\ y,\ z) = (4,\ 13,\ 1),\ (2,\ 10,\ 4),\ (8,\ 7,\ 2)$

$(6,\ 4,\ 5),\ (12,\ 1,\ 3),\ (4,\ 1,\ 8)$

(5)



(i) A の座標は $(1,\ 7)$ である.

ここで B の座標を $(t,\ -3t + 10)$ とおく.

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が $45°$ であるため,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t + 7(-3t + 10) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2 + (-3t+10)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ —(*)

ここで (右辺) > 0 であるから

$t + 7(-3t + 10) > 0 \qquad \therefore\ t < \dfrac{7}{2}$ —(**)

(*) の両辺を2乗し整理して

$3t^2 - 26t + 48 = 0$

$\therefore\ (3t - 8)(t - 6) = 0$

$\therefore\ t = \dfrac{8}{3},\ 6.$

(**) より $t = \dfrac{8}{3}$ $\qquad \therefore\ B\left(\dfrac{8}{3},\ 2\right)$

(ii) $\overrightarrow{OP} = s\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$ $\quad (s \geq 0,\ t \geq 0,\ 10s + 6t \leq 3)$

ここで $s' = \frac{10}{3}s$, $t' = 2t$ とすると

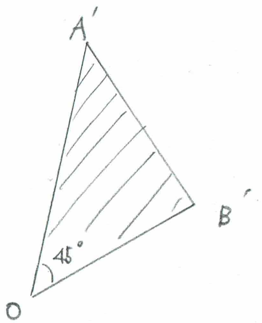
$$\overrightarrow{OP} = s'\left(\frac{3}{10}\overrightarrow{OA}\right) + t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$(s' \geq 0,\ t' \geq 0,\ s' + t' \leq 1)$ となる

このため $\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{10}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ となるように

A′, B′ を定めると

点Pの存在する領域は $\triangle OA'B'$ となる



よってこの面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA'}| \cdot |\overrightarrow{OB'}| \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot 5\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{4}$$

(6) $y = 3\sqrt{3}\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta$

(i)

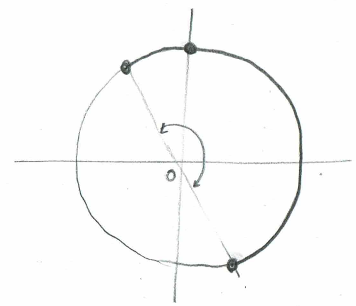
$$y = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{3}\,\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

(ii)

$y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{2}$ となる。

ここで $-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$ であるから

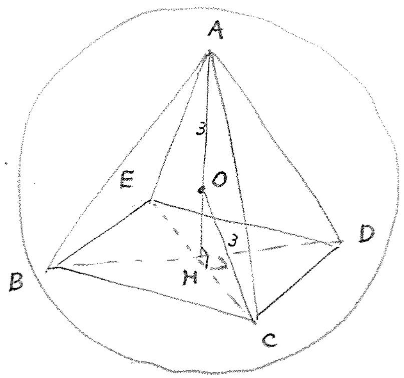


y は

$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ つまり $\theta = \frac{5}{12}\pi$ のとき 最大値 $1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$2\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ つまり $\theta = 0$ のとき 最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

(7)



A から 面 BCDE におろした垂線の足を H とし，

$AH = t$ とする．（$0 < t < 6$ である）

このとき　$OH = t - 3$，　$CH = \sqrt{t(6-t)}$

$CD = \sqrt{2}\,CH = \sqrt{2t(6-t)}$　であるから，

$V = \frac{1}{3} \cdot CD^2 \cdot AH$

$= \frac{2}{3} t^2 (6-t)$

$\therefore \frac{dV}{dt} = -2t(t-4)$

このため V の増減は以下のようになる

t	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
V'		+	0	−	
V		↗	$\frac{64}{3}$ 極大	↘	

よって　V は $t = 4$ のとき　最大値 $\frac{64}{3}$ をとる

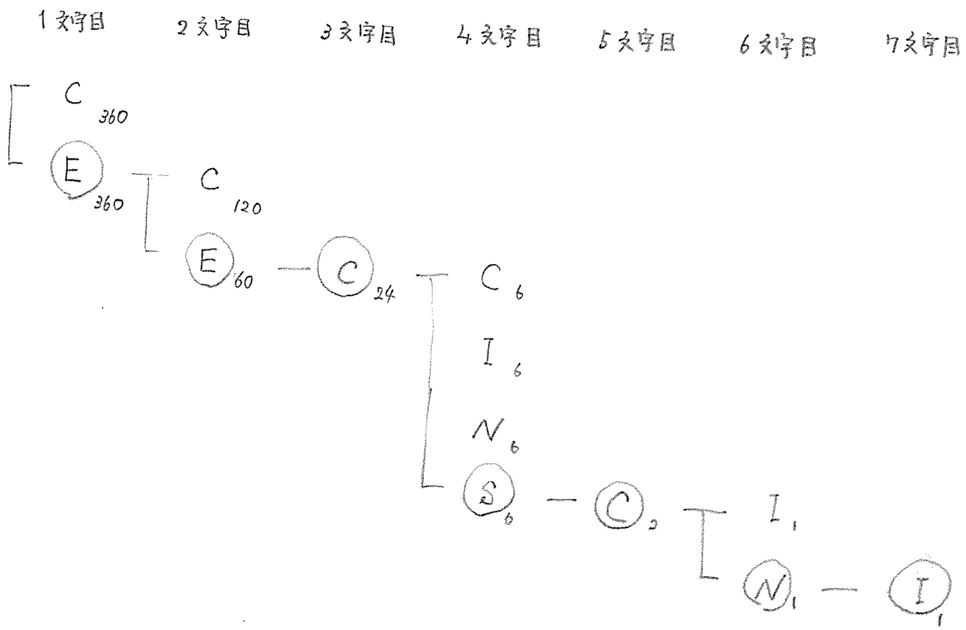
[II]

(1) 作ることのできる文字列は全部で

$$\frac{7!}{2!\,2!} = 1260$$ 通りある。

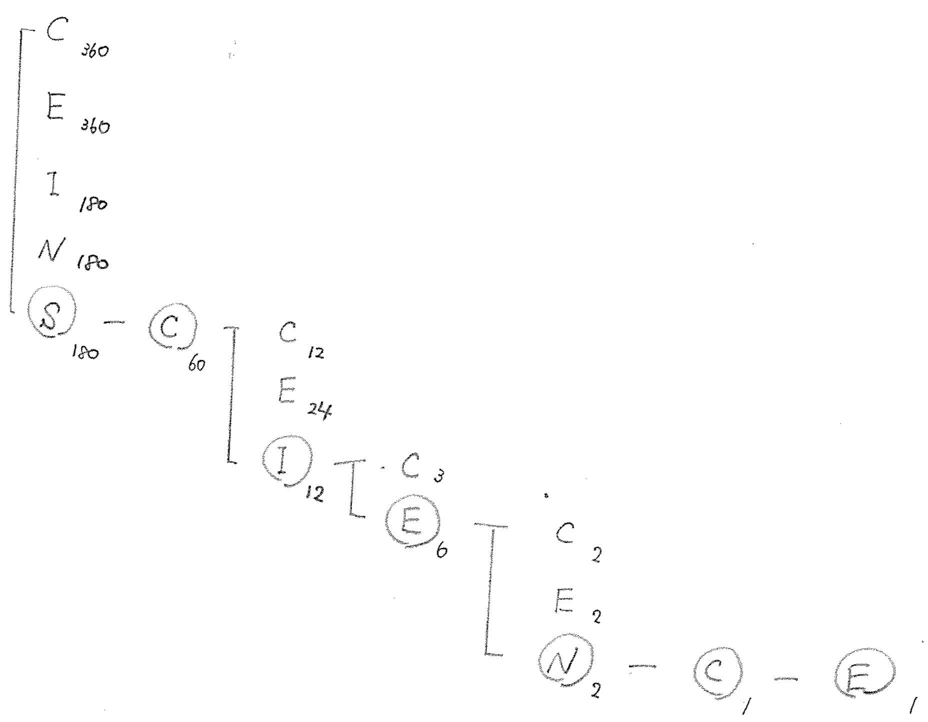
(2) 1文字目がCである文字列は $\frac{6!}{2!} = 360$ 通りある

以下同様に計算すると



よって a_{500} = EECSCNI

(3) SCIENCE の前に並ぶ文字列の数を求めれば良い。



このため $n = 360 + 360 + 180 + 180 + 12 + 24 + 3 + 2 + 2 + 1$

$= 1124$

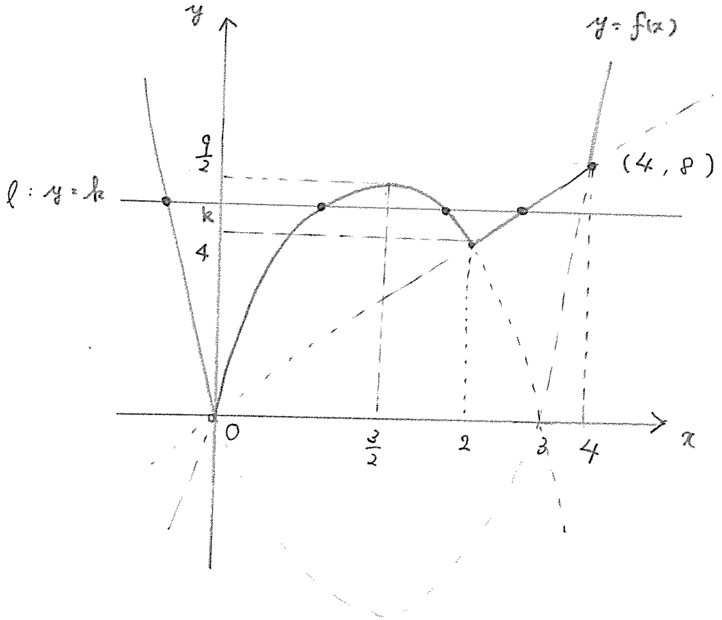
[Ⅲ]

(1) $a = 4$ とすると

$$y = \begin{cases} 2x(x-3) & (x \leqq 0,\ 4 \leqq x) \\ -2x(x-3) & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 2x & (2 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$

となる。

グラフは以下の通り



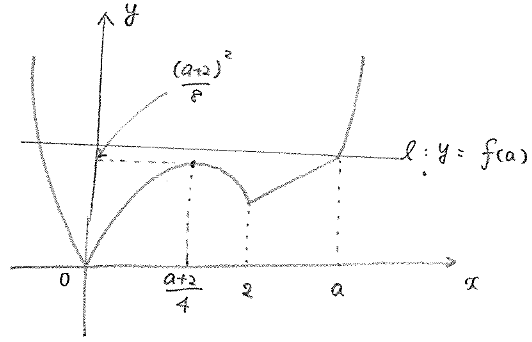
よって l と $y = f(x)$ が異なる4点で交わるのは、グラフから $4 < k < \frac{9}{2}$ のときと分かる

(2) $2 < a$ であることに注意すると、

$$y = \begin{cases} 2x\left(x - \frac{a+2}{2}\right) & (x \leqq 0,\ a \leqq x) \\ -2x\left(x - \frac{a+2}{2}\right) & (0 \leqq x \leqq 2) \\ (a-2)x & (2 \leqq x \leqq a) \end{cases}$$

となり、

グラフの概形は以下の通り



よって l と $y = f(x)$ のグラフが異なる2点で交わるとき、

$$\frac{(a+2)^2}{8} < f(a) = a(a-2)$$

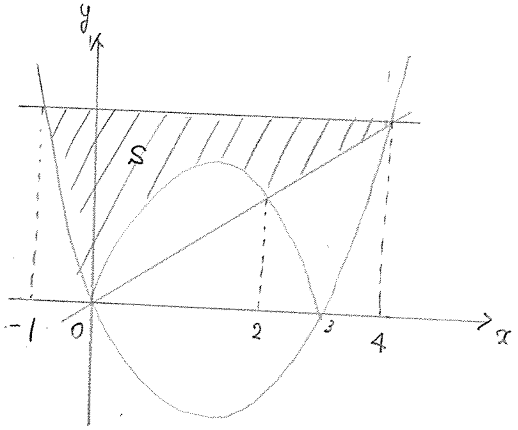
$$\therefore\ 7a^2 - 20a - 4 > 0$$

$$\therefore\ a < \frac{10 - 8\sqrt{2}}{7},\ \frac{10 + 8\sqrt{2}}{7} < a$$

$a > 2$ より $\frac{10 + 8\sqrt{2}}{7} < a$

(3) $\dfrac{10+8\sqrt{2}}{7} < a$ を満たす最小の整数は $a=4$

このとき $y=f(a)$ と $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積 S は



$$S = \frac{1}{6}\cdot 2\left(4-(-1)\right)^3 - \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(4-0)^3 - \frac{1}{6}\cdot 2\,(2-0)^3$$

$$= \underline{\frac{53}{3}}$$