# I

(1) 移動の最小手数は 2 であり

そのような手順は
$$\begin{pmatrix} 5五 \to 5一 \to 1一 \\ 5五 \to 1五 \to 1一 \end{pmatrix}$$
の 2個ある

(2) (i) 1手目で 5一 または 1五に動かした場合

1一まで 2手で移動する手順はそれぞれ 3個ある

(ii) 1手目で 4五〜2五，5四〜5二 のいずれかに動かした場合

1一まで 2手で移動する手順はそれぞれ 2個ある

(i)(ii)より 求める手順は $2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 18$ 個

(3) 移動の最大手順は 8 である．

8手で動かす手順は ${}_8C_4 = 70$ 個ある

(4) 5五から 1一に動く手順を，1手目に動かす位置により場合分けをすると，

手順の総数は 4五から1一，…，1五から1一，5四から1一，…，5一から1一に動く手順の総数を足したものと分かる．

1一から1一に致る手順は 1個であることに注意し 各マスから1一に動く総数を同様にして帰納的に求めていくと 下のようになる

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 2 | 1 | 1 | 一 |
| 28 | 12 | 5 | 2 | 1 | 二 |
| 94 | 37 | 14 | 5 | 2 | 三 |
| 289 | 106 | 37 | 12 | 4 | 四 |
| 838 | 289 | 94 | 28 | 8 | 五 |

よって 手順の総和は 838 個 ある

Ⅱ

(1) 参加した日数を $n$ とする。

このとき合計点数の最大値は $40n$ となる。

よって景品に応募するためには $40n \geqq 100$

つまり $\underline{n \geqq 3}$ でなくてはならない。

(2) 1回のゲームで得られる点数の期待値は

$$\frac{1}{3}\cdot 40+\frac{1}{3}\cdot 20+\frac{1}{3}\cdot 10=\frac{70}{3}$$

よって週において5回のゲームすべてに参加したとき

合計点数の期待値は

$$5\cdot\frac{70}{3}=\underline{\frac{350}{3}}\text{ 点}$$

(3) (i) 2回以上勝つ場合

このようになる確率は $1-{}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4-{}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{131}{243}$ であり

このとき必ず点数は100点をこえる

(ii) 1回勝つ場合

合計点数が100点以上となるとき

負けの回数は 0〜2回 でなくてはならない

よって100点以上になる確率は

$$\frac{5!}{1!\,4!}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{5!}{1!\,3!\,1!}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{5!}{1!\,2!\,2!}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{55}{243}$$

(iii) 1回も勝たない場合

合計点数が100点以上となるには

5回すべて引き分けなくてはならない

この確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

(i)〜(iii)は互いに排反であるため

求める確率は

$$\frac{131}{243}+\frac{55}{243}+\frac{1}{243}=\underline{\frac{187}{243}}$$

(4)

3回目までに負けるとき、点数の最大値は 90 となり、景品には応募できない。

このため 3回目まで負けないときのみを考えれば良い

(i) 4回目に負けるとき

1〜3回目に 3回 もしくは 2回勝てば良い

よって求める確率は

$${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81}$$

(ii) 5回目に負けるとき

1〜4回目に 1回以上勝てば良い

よって求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{81}$$

(iii) 1回も負けないとき

このとき必ず景品に応募できる

このため求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

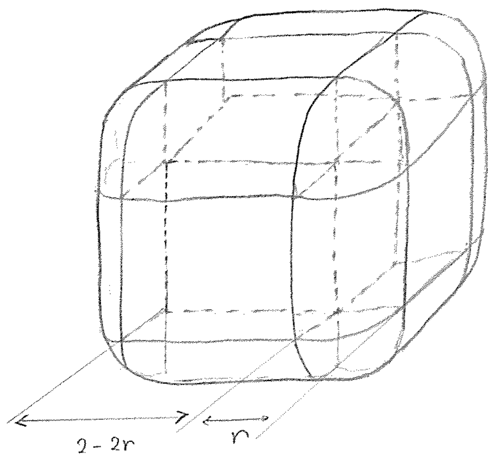
(i)〜(iii)より求める確率は

$$\frac{4}{81} + \frac{5}{81} + \frac{32}{243} = \frac{59}{243}$$

III

(ii) $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ のとき

$S$が通過しうる点全体のなす図形は下の通り




よってこの体積 $V'$ は

$$V' = (2-2r)^3 + 6 \times r(2-2r)^2 + 3 \times \pi r^2 (2-2r) + \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \left(16 - \frac{14}{3}\pi\right) r^3 + (-24 + 6\pi) r^2 + 8$$

よって求める体積は

$$V = 2^3 - V' = \left(-16 + \frac{14}{3}\pi\right) r^3 + (24 - 6\pi) r^2$$

(i) $0 < r < \frac{1}{2}$ のとき

(ii)で図示した図形の内部に $S$ が通過し得ない領域が存在する。

これは1辺 $(2-4r)$ の立方体である。

このため求める体積は

$$V = \left(-16 + \frac{14}{3}\pi\right) r^3 + (24 - 6\pi) r^2 + (2-4r)^3$$

$$= \left(-80 + \frac{14}{3}\pi\right) r^3 + (120 - 6\pi) r^2 - 48r + 8$$

IV

$f(x) = x^2$, $g_a(x) = -(x-a)^2 + a$

(1) 2つの曲線が共有点をもつための必要十分条件は、

$x$ の2次方程式 $f(x) = g_a(x)$ —① が実数解をもつことである。

この判別式 $D$ が $D \geqq 0$ を満たせば良いから

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a(a-1)$$

$$= -a(a-2) \geqq 0$$

$$\therefore \ 0 \leqq a \leqq 2$$

(2)

共有点の $x$ 座標を $\alpha, \beta$ $(\alpha \leqq \beta)$ とする。

このとき $\beta, \alpha$ は ① の解であるため

$$\beta - \alpha = \frac{a + \sqrt{\frac{D}{4}}}{2} - \frac{a - \sqrt{\frac{D}{4}}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{-a^2 + 2a} \quad \text{である}$$

このため、求める面積は、

$$S_a = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (\beta - \alpha)^3 = \frac{\left(\sqrt{-a^2+2a}\right)^3}{3}$$

(3)

(2) より、$-a^2 + 2a$ が最大となるとき $S_a$ も最大となる。

ここで、$-a^2 + 2a = -(a-1)^2 + 1$ である。

よって $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲では、$a = 1$ のとき

$-a^2 + 2a$ は最大値 $1$ をとる。

よって $a = 1$ のとき $S_a$ は最大値 $\frac{1}{3}$ をとる。

V

(1) 表中の第$i$行第$j$列の要素を$a_{ij}$と表す

ここで $a_{ij}=ij$ である

第$k$行の第1列から第$n$列までの総和は

$$s_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}kj=k\sum_{j=1}^{n}j=\underline{\frac{1}{2}n(n+1)k}$$ である。

このため

$$S=\sum_{k=1}^{n}s_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}n(n+1)k=\frac{1}{2}n(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\underline{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

次に第$k$行の第1列から第$k$列までの総和は

$$r_k=\sum_{j=1}^{k}kj=k\sum_{j=1}^{k}j=\underline{\frac{1}{2}k^2(k+1)}$$

同様にして $c_k=\frac{1}{2}k^2(k+1)$，また，$a_{kk}=\underline{k^2}$ であるから。

$$S=\sum_{k=1}^{n}(r_k+c_k-k^2)=\underline{\sum_{k=1}^{n}k^3}$$

以上のことから。

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$ と分かる。

(2) 第$i$行第$j$列を$b_{ij}$と表す。このとき $b_{ij}=i^3j^3$ である。

まず，第$k$行の第1列から第$n$列までの総和は

$$s_k=\sum_{j=1}^{n}k^3j^3=k^3\sum_{j=1}^{n}j^3=\underline{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2k^3}$$

$$\therefore S=\sum_{k=1}^{n}s_k=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k^3=\underline{\frac{1}{16}n^4(n+1)^4}$$

次に第$k$行の第1列から第$k$列までの総和は

$$r_k=\sum_{j=1}^{k}k^3j^3=\underline{\frac{1}{4}k^5(k+1)^2}$$

同様にして，$c_k=\frac{1}{4}k^5(k+1)^2$，また，$a_{kk}=\underline{k^6}$ であるから

$$S=\sum_{k=1}^{n}(r_k+c_k-k^6)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^7+k^5)$$

以上のことから

$$2S=\sum_{k=1}^{n}(k^7+k^5)=\underline{\frac{1}{8}n^4(n+1)^4}$$

VI

(1) $x = 60\sqrt{n} - wn$

$y = wn + 6(30-n)$ である.

このため

$$x+y = 60\sqrt{n} + 6(30-n)$$

$$= -6(\sqrt{n}-5)^2 + 330$$

よって $0 \leqq \sqrt{n} \leqq \sqrt{30}$ の範囲では

$\sqrt{n} = 5$ つまり $n = 25$ のとき $x+y$ は最大値 $330$ をとる.

(2) (1)より

$x+y$ の最大値は $330$ である

(3)

仮定により $x \geqq 0$, $y-180 \geqq 0$ である.

よって相加・相乗平均の関係により

$$x(y-180) \leqq \frac{1}{4}(x+y-180)^2 \leqq 5625 \quad (\because (1)より)$$

等号が成立するのは $x = 75$, $y-180 = 75$, $n = 25$ のときである.

よって $x(y-180)$ が最大となるとき

$x = 75$, $y = 255$, $n = 25$, $w = 9$ である