早稲田大学 理工学部 2019

[I]

(1) $n=5k$（kは自然数） つまり $n\equiv 0 \pmod 5$ となり、

かつ(*)を満たすnが存在すると仮定する（背理法）。

このとき、$6n^2+5 \equiv 6\cdot 0^2+5 \equiv 0 \pmod 5$ である。

よって $6n^2+5$ は5の倍数であるが、仮定より

これは素数でもあったから、$6n^2+5=5$ でなくてはならない。

つまり $n=0$ である

しかしこのとき $n^2+1=1$ は素数ではないため、(*)を満たさない

これは仮定に矛盾する。

よって背理法により $n=5k$ のとき nは(*)を満たさない。

(2) nを5でわった余りで場合分けをする。

(i) $n\equiv 0 \pmod 5$ のとき

(1)より (*)を満たすnは存在しない。

(ii) $n\equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき

nが(*)を満たすとする。

ここで、

$2n^2+3 \equiv 2\cdot 1^2+3 \equiv 0 \pmod 5$ である。

このため $2n^2+3$ は5の倍数であり、かつ素数でもある

$\therefore\ 2n^2+3=5$、 つまり $n=1$ （$\because n\geqq 0$）

また $n=1$のとき、2, 5, 11 は素数であるため(*)を満たす

従って(*)を満たすようなnは$n=1$のみである。

(iii) $n\equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき

nが(*)を満たすとする。ここで、

$n^2+1 \equiv (\pm 2)^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ である。

このため n^2+1 は5の倍数であり かつ素数でもある。

$\therefore\ n^2+1=5$ つまり $n=2$ （$\because n\geqq 0$）

また、$n=2$のとき、5, 11, 29 は素数であるため(*)を満たす。

従って(*)を満たすようなnは$n=2$のみである。

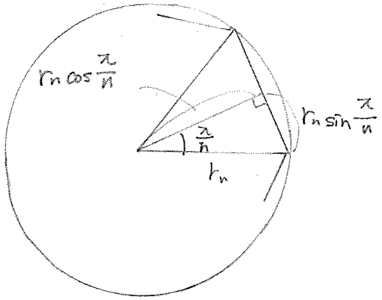
よって(i)〜(iii)より

(*)を満たすようなnは $n=1, 2$ のみである

□

[Ⅱ]

(1) P_n の外接円の半径を r_n とする。$(n \geqq 3)$



このとき P_n の面積は 1 であるため

$$n r_n^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = 1$$

このため、

$$(L_n)^2 = \left(2n r_n \sin\frac{\pi}{n}\right)^2$$

$$= 4n^2 r_n^2 \sin^2\frac{\pi}{n}$$

$$= 4n \tan\frac{\pi}{n} \cdot \left(n r_n^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= 4n \tan\frac{\pi}{n}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}(L_n)^2 = \lim_{n\to\infty} 4n\tan\frac{\pi}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4\pi\left(\frac{n}{\pi}\tan\frac{\pi}{n}\right) = 4\pi$$

ここで、任意の $n \geqq 3$ に対して $L_n > 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{(L_n)^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(L_n)^2} = 2\sqrt{\pi}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}\tan x$ とする $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

このとき $f'(x) = \dfrac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$ である。

ここで、$g(x) = x - \sin x \cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とする

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $g'(x) = 1 - \cos 2x > 0$ であるから

$g(x)$ は $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加する

よって $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ である。

このため $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\cos^2 x} > 0$ であるから

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x)$ は単調増加する

ここで、$3 \leqq n < k$ のとき

$0 < \frac{\pi}{k} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$(L_n)^2 = 4\pi f\left(\frac{\pi}{n}\right) > 4\pi f\left(\frac{\pi}{k}\right) = (L_k)^2$$

□

[Ⅲ]

(1) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{n}}-1 < \left[\dfrac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right] \leq \dfrac{1}{\sin\frac{1}{n}}$ であるため

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-1\right) < \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right] \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}$$ である

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{n}} = 1$$ であるため

はさみうちの定理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right] = 1$$

(2) 自然数 n に対して、$m_n = [\sqrt{n}]$ と定める。

自然数 k に対して $k = [\sqrt{m}]$ となるとき

$k^2 \leq m < (k+1)^2$ であるから、

これを満たす m は $(2k+1)$ 個存在することに注意すると、

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{n}]\right)$$

$$\leq \frac{1}{m_n^3}\left(1+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{(m_n+1)^2}]\right)$$

$$= \frac{1}{m_n^3}\sum_{k=1}^{m_n+1}k(2k+1) = \frac{1}{m_n^3}\left\{\frac{1}{3}(m_n+1)(m_n+2)(2m_n+3)+\frac{1}{2}(m_n+1)(m_n+2)\right\}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+\cdots+[\sqrt{n}]\right)$$

$$\geq \frac{1}{(m_n+1)^3}\sum_{k=1}^{m_n}k(2k+1) = \frac{1}{(m_n+1)^3}\left\{\frac{1}{3}m_n(m_n+1)(2m_n+1)+\frac{1}{2}m_n(m_n+1)\right\}$$

$$\left(= S_n'' \text{ とおく}\right)$$

が分かる。

ここで、$n\to\infty$ のとき $m_n\to\infty$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}S_n' = \lim_{m_n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)\left(1+\frac{2}{m_n}\right)\left(2+\frac{3}{m_n}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m_n}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)\left(1+\frac{2}{m_n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}$$

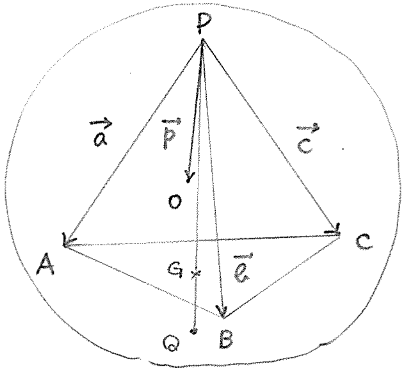
$$\lim_{n\to\infty}S_n'' = \lim_{m_n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^3}\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)\left(2+\frac{1}{m_n}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m_n}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}$$ である

このため、はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1+\cdots+[\sqrt{n}]\right) = \frac{2}{3}$$

[IV]



(1) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OP}| = 1$ であるから

$|\vec{a}-\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2$

$\therefore\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} + \cancel{|\vec{p}|^2} = \cancel{|\vec{p}|^2}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{a} = 2\vec{a}\cdot\vec{p}$

(2) $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ である。

よって $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PG} = \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ である。

ここで、$|\overrightarrow{OQ}| = |\vec{p}| = 1$ であるから、

$\left|\frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \vec{p}\right|^2 = |\vec{p}|^2$

$\therefore\ \frac{k^2}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 - \frac{2k}{3}(\vec{a}\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{p}+\vec{c}\cdot\vec{p}) + \cancel{|\vec{p}|^2} = \cancel{|\vec{p}|^2}$ である。

ここで (1) と同様にして $\vec{a}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2$, $\vec{b}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}|\vec{b}|^2$, $\vec{c}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}|\vec{c}|^2$

が求まる。

このため

$$\frac{k^2}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = \frac{k}{3}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$$

条件より、$k \neq 0$. $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| \neq 0$ であるから、($\because$ PABC は4面体をなす)

$$k = \frac{3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)}{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}$$

(3) $PG : PQ = 1:3$ のとき、$k = 3$ である

このとき (2) より

$$3 = \frac{3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)}{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}$$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ —①

ここで

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} \geqq 0$. $\vec{b}\cdot\vec{c} \geqq 0$. $\vec{c}\cdot\vec{a} \geqq 0$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ のうち、1つでも正のものが存在すると ① の左辺も正となり、① が成り立たない。

このため $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ でなくてはならない。

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq 0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}\leqq 0$, $\vec{c}\cdot\vec{a}\leqq 0$ のとき

(i) と同様にして

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ でなくてはならない

(i), (ii) により $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ について次のいずれかが成り立つ

- 少なくとも1つは正、少なくとも1つは負
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

このため ∠APB, ∠BPC, ∠CPA について次のいずれかが成り立つ

- 少なくとも1つは鋭角、少なくとも1つは鈍角である
- 3つの角が全て直角である

□

(4) PG : PQ = 1 : 3 のとき $k=3$ である。

このため (2) より

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}$$ が成り立つ。

$$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}k\,|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}$$

$$= \underline{2}$$

ここで、P, Q は半径1の球面 S 上の点であったため

PQ は S の直径とわかる。

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ}\ (=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 2\vec{p}$$

また、(1) より $\vec{a}\cdot\vec{a}=2\vec{a}\cdot\vec{p}$ であったから

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

これと ① により $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ とわかる。

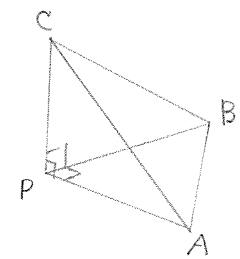
同様にして、$\vec{b}\cdot\vec{b}=2\vec{b}\cdot\vec{p}$, $\vec{c}\cdot\vec{c}=2\vec{c}\cdot\vec{p}$ から

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ もわかる。

このため $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は互いに直交している。

よって求める体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{27}}$$



[V]

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\left\{(1+\cos\theta)\cos\theta\right\} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\cos\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{1}{2}\right)$

$= -\sin\theta - \sin 2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\left\{(1+\cos\theta)\sin\theta\right\} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)$

$= \cos\theta + \cos 2\theta$　である

よって

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(\sin\theta + \sin 2\theta)^2 + (\cos\theta + \cos 2\theta)^2}$

$= \sqrt{2 + 2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta)}$

$= \sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$= \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \underline{2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}$

(2) $-\pi \leq a \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$-\pi \leq a,\ a + \dfrac{2}{3}\pi \leq \pi$ である

よって $a \leq \theta \leq a + \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ である.

$\therefore\ l(a) = \displaystyle\int_a^{a+\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$= \displaystyle\int_a^{a+\frac{2}{3}\pi} 2\cos\dfrac{\theta}{2}\, d\theta$

$= \left[4\sin\dfrac{\theta}{2}\right]_a^{a+\frac{2}{3}\pi}$

$= \underline{4\sin\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{3}\pi\right)}$

(3) $\dfrac{\pi}{3} < a \leq \pi$ のとき

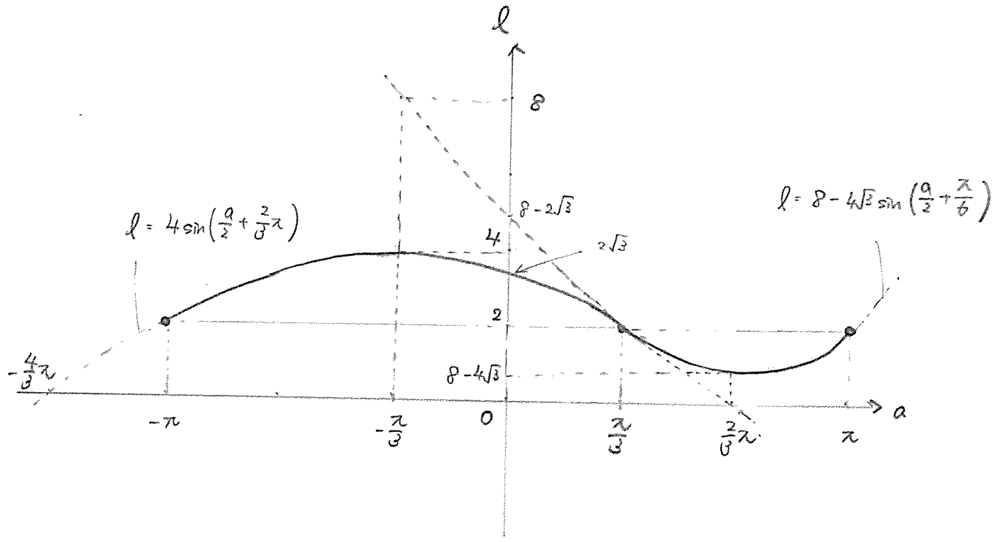
$\begin{cases} a \leq \theta \leq \pi \text{ のとき } \cos\dfrac{\theta}{2} \geqq 0 \\ \pi < \theta \leq a + \dfrac{2}{3}\pi \text{ のとき } \cos\dfrac{\theta}{2} < 0 \end{cases}$ である

$\therefore\ l(a) = \displaystyle\int_a^{\pi} 2\cos\dfrac{\theta}{2}\, d\theta - \int_{\pi}^{a+\frac{2}{3}\pi} 2\cos\dfrac{\theta}{2}\, d\theta$

$= \left[4\sin\dfrac{\theta}{2}\right]_a^{\pi} - \left[4\sin\dfrac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{a+\frac{2}{3}\pi}$

$= 8 - 4\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

以上より　$l = l(a)$ のグラフは、以下の実線部分



グラフから、$l(a)$ は

$a = -\frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 4

$a = \frac{2}{3}\pi$ のとき 最小値 $8-4\sqrt{3}$ をとる