早稲田大学　教育学部　2019

1 (1) $y = x^2$ の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$y = 2ax - a^2$ である

これと $y = x^3 - ax$ が相異なる3点で交わるとする

このとき x の3次方程式 $(x^3 - ax) - (2ax - a^2) = 0$ ―(*)

が相異なる3つの実数解をもつ.

ここで (*) の左辺を $f(x)$ とすると,

$y = f(x)$ は x 軸と相異なる3点で交わる.

また, $f'(x) = 3(x^2 - a)$ である.

$a \leqq 0$ とすると $f'(x) \geqq 0$ となり $f(x)$ は単調増加する.

このとき $y = f(x)$ は x 軸と相異なる3点で交わることはない.

よって $a > 0$ でなければならない.

このとき $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{a}$ であり

$f(x)$ の増減は以下の通り

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $f(-\sqrt{a}) > 0$, $f(\sqrt{a}) < 0$ であれば条件を満たす.

$$\therefore \begin{cases} f(-\sqrt{a}) = a\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2) > 0 \\ f(\sqrt{a}) = a\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) < 0 \end{cases}$$

このとき $\sqrt{a} < 2$ 　つまり $\underline{0 < a < 4}$ $(\because a > 0)$

(2)

$y = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x = f(x)$ とする.

ここで $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $f''(x) = -\sin x < 0$ である

このためグラフは上に凸である

さらに $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で

$f(x) \geqq 0$ となることが分かる.

よって求める回転体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\, dx$$

慶早進学塾

ここで $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ とすると

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-dx)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore I = \frac{\pi}{4}$$

((別) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{4}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx = \frac{\pi^3}{24}$$

である.

よって

$$V = \frac{\pi^2}{4} - 4 + \frac{\pi^2}{6} = \underline{\frac{5}{12}\pi^2 - 4}$$

(3) $i^4 = 1$ となることに注意する.

数列 $\{a_n\}$ を 4 でわった余りを漸化式より求めると

$1,\ 1,\ 2,\ -1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \dots$ となる.

このため, $\{i^{a_n}\}$ は

$i,\ i,\ -1,\ -i,\ i,\ 1,\ \dots$ となる.

以上のことから,

$$\sum_{n=1}^{2019} i^{a_n} = \sum_{k=1}^{336} (i + i - 1 - i + i + 1) + (i + i - 1)$$

$$= 336 \cdot 2i + (2i - 1)$$

$$= \underline{674i - 1}$$

(4)

$$\left|z-\frac{1}{4}a\right| = \frac{1}{2}|z-a|$$

$$\therefore \left|z-\frac{1}{4}a\right|^2 = \frac{1}{4}|z-a|^2$$

$$\therefore \left(z-\frac{1}{4}a\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{4}a\right) = \frac{1}{4}(z-a)(\bar{z}-a)$$

整理すると

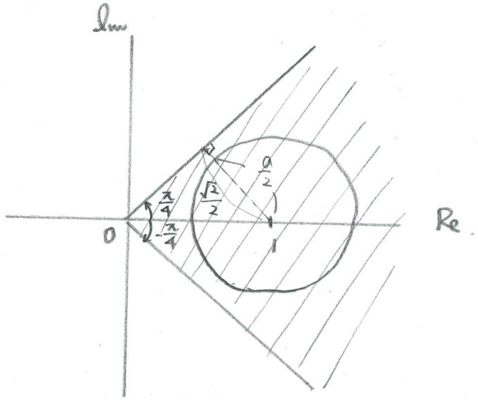
$$|z|^2 = \frac{a^2}{4} \qquad \therefore |z| = \frac{a}{2} \quad (\because |z|>0,\ a>0)$$

となる.

つまり $\left|(1-z)-1\right| = \dfrac{a}{2}$ であるから

$1-z$ は 1 を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円周上の点である.

この円周上の全ての点が $\left|\arg(1-z)\right| \leqq \dfrac{\pi}{4}$ をみたすことは



$0 < \dfrac{a}{2} \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であることと同値である.

$$\therefore \quad 0 < a \leqq \sqrt{2}$$

慶早進学塾 3

2

(1) n回サイコロを投げた後 コインが表である確率を p_n とする. $(n \geqq 0)$

ここで、コインの表裏は $\frac{1}{3}$ の確率で入れ替わるため、

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) \quad (n=0,1,\dots) \text{ である.}$$

$$\therefore\ p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

このため数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である. よって一般項は

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore\ \underline{p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}}\ //$$

(2) n回サイコロを投げた後 コインがAにいる確率を q_n とする $(n \geqq 0)$

このとき

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}(1-q_n) = \frac{1}{3} \quad (n \geqq 0)$$

よって 一般項は

$$q_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \frac{1}{3} & (n \geqq 1) \end{cases}$$

以上のことから、 $n \geqq 1$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n - a_n) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}a_n$$

$n=10$ を代入して

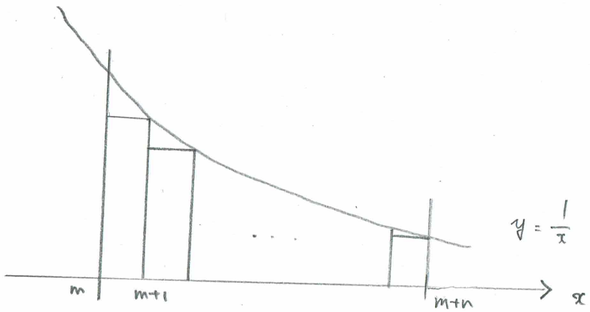
$$a_{11} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{6} + \frac{683}{2 \times 3^{10}}\right\}$$

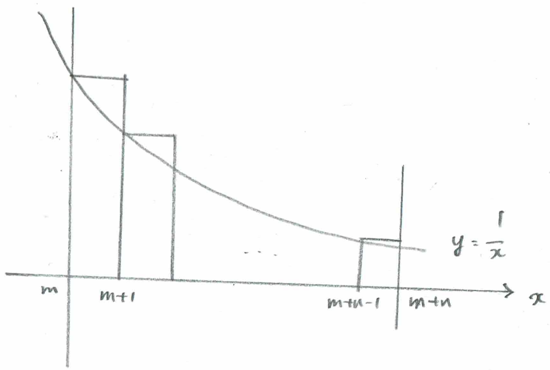
$$= \underline{\frac{1}{6} - \frac{455}{2 \times 3^{10}}}\ //$$

3

(1) 曲線 $y=\frac{1}{x}$ と $x=m$, $x=m+n$, x軸とで

囲まれた図形の面積を S とする





グラフから S は 上の階段状の図形の面積 S' より大きく

下の階段状の図形の面積 S'' より小さいと分かる。

ここで、 $S=\int_m^{m+n}\frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_m^{m+n}=\log\left(1+\frac{n}{m}\right)$

$$S'=\sum_{k=m+1}^{m+n}\frac{1}{k}=\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m}=\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{1}{k}-\frac{n}{m(m+n)}$$

$$S''=\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{1}{k}$$ である

よって

$$\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{1}{k}-\frac{n}{m(m+n)}<\log\left(1+\frac{n}{m}\right)<\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{1}{k}$$

$$\therefore \log\left(1+\frac{n}{m}\right)<\sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{1}{k}<\log\left(1+\frac{n}{m}\right)+\frac{n}{m(m+n)}$$

□

(2)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+k)(n+1-k)}$$

$$=\frac{1}{3n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n+k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$$

$$=\frac{1}{3n+1}\left(\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$ である

このため (1) より

$$a_n > \frac{1}{3n+1}\left(\log\left(1+\frac{n}{2n+1}\right)+\log(1+n)\right)$$

$$= \frac{1}{3n+1}\log\left(\frac{(n+1)(3n+1)}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3n+1}\left\{\log\frac{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{1}{n})}{2+\frac{1}{n}}+\log n\right\} \quad (= a_n' \text{ とおく})$$

であり

$$a_n < \frac{1}{3n+1}\left(\log\left(1+\frac{n}{2n+1}\right)+\log(1+n)+\frac{n}{(2n+1)(3n+1)}+\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= a_n' + \frac{n}{(2n+1)(3n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)(3n+1)}$$

である

このため $\dfrac{a_n'}{b_n} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{a_n'}{b_n}+\dfrac{1}{b_n}\left\{\dfrac{n}{(2n+1)(3n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+1)(3n+1)}\right\}$ ―(*)

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n'}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}\left\{\frac{1}{\log n}\log\frac{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{1}{n})}{2+\frac{1}{n}}+1\right\}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\left\{\frac{n}{(2n+1)(3n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)(3n+1)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left\{\frac{1}{(2n+1)(3+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{1}{n})}\right\} = 0$$

である

このことより $n\to\infty$ で (*) の左辺, 右辺は ともに $\frac{1}{3}$ に収束する

よって はさみうちの定理 から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$$

慶早進学塾

4

(1) P_1 の頂点を $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ として

xy 平面上で考える

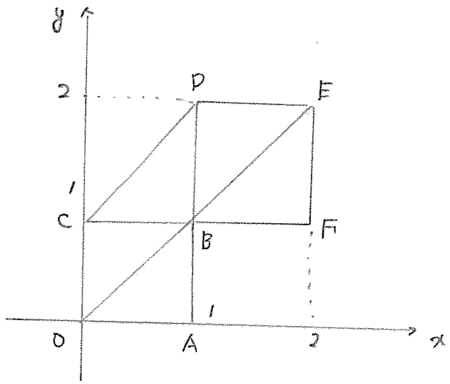
平行四辺形において 3頂点が格子点のとき 残りの1つも格子点である。このため n に関する帰納法で

P_n のすべての頂点が格子点であると分かる。

よって $d(P_{10})$ を最小とするとき P_{10} は 1辺1の正方形である

このことから $d(P_{10}) \geqq \sqrt{2}$

また、



上の図において

$P_1 = \square OABC$

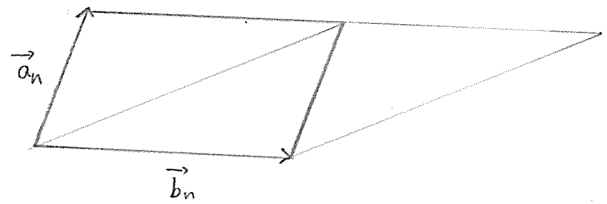
$P_2 = \square OBDC$

$P_n = \begin{cases} \square BCDE & (n \geqq 3,\ n \text{は奇数}) \\ \square BDEF & (n \geqq 3,\ n \text{は偶数}) \end{cases}$

とすれば 確かに $d(P_{10}) = \sqrt{2}$ となる

$\therefore\ \underline{m = \sqrt{2}}$

(2)



平行四辺形 P_n に対して 上のように $\vec{a_n}, \vec{b_n}$ をとる

ただし $|\vec{a_n}| \leqq |\vec{b_n}|$, $\vec{a_n}\cdot\vec{b_n} \geqq 0$ とする

このとき $d(P_n)$ の最大値は

$$|\vec{a_n}+\vec{b_n}| = \sqrt{|\vec{a_n}|^2 + 2\vec{a_n}\cdot\vec{b_n} + |\vec{b_n}|^2} \text{ である}$$

ここで、P_n の定義により P_n の面積は n によらず 1 である

このことから $\sqrt{|\vec{a_n}|^2|\vec{b_n}|^2 - (\vec{a_n}\cdot\vec{b_n})^2} = 1$

$$\therefore\ \vec{a_n}\cdot\vec{b_n} = \sqrt{|\vec{a_n}|^2|\vec{b_n}|^2 - 1} \quad (\because\ \vec{a_n}\cdot\vec{b_n} > 0)$$

$$\therefore\ |\vec{a_n}+\vec{b_n}| = \sqrt{|\vec{a_n}|^2 + |\vec{b_n}|^2 + 2\sqrt{|\vec{a_n}|^2|\vec{b_n}|^2 - 1}}$$

よって $d(P_n)$ を最大とするには $|\vec{a_n}|, |\vec{b_n}|$ も最大であれば良い

ここで、P_n と P_{n-1} が 3頂点、P_n と P_{n-2} が少なくとも 2頂点を共有することに注意すると

$|\vec{a_n}|$ が $d(P_{n-2})$ の最大値、$|\vec{b_n}|$ が $d(P_{n-1})$ の最大値となるようにとれば良いことが分かる。

つまり、作り方から　$\overrightarrow{a_{n+1}} = \overrightarrow{b_n}$,　$\overrightarrow{b_{n+1}} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n}$.　としていくと、
—(*)

$d(P_n)$ が最大となるように　P_n の列を

構成していくことができる、ことが分かる。

また、$\overrightarrow{a_1} = (0, 1)$,　$\overrightarrow{b_1} = (1, 0)$　であったから

(*) により順に求めると

$\overrightarrow{a_{10}} = (34, 21)$

$\overrightarrow{b_{10}} = (55, 34)$

$\therefore\ M = \left|\overrightarrow{a_{10}} + \overrightarrow{b_{10}}\right| = \sqrt{89^2 + 55^2} = \underline{\sqrt{10946}}$ //