I (1) 11で割ると6余り，6で割ると3余る整数は

$66m + 39$　（mは整数）とおける．

このため，数列$\{a_k\}$の一般項は　$a_k = 66k + 39$　である．

$\therefore\ a_{30} = \underline{2019}$

(2) 整式$P(x)$を$(x+2)(x+3)$で割った商を$Q(x)$

余りを$ax + b$とおく．（a, bは定数）

このとき　$P(x) = (x+2)(x+3)Q(x) + (ax+b)$　である　―(*)

ここで剰余定理より$P(-2) = 3$，$P(-3) = -2$であることに

注意すると，(*)の両辺に$x = -2, -3$を代入することで

$$\begin{cases} -2a + b = 3 \\ -3a + b = -2 \end{cases}$$
を得る．

$\therefore\ a = 5,\ b = 13$

よって求める余りは　$\underline{5x + 13}$

(3) aは実数であるとする．

$$A = \frac{\sqrt{-3}\sqrt{-2} + \sqrt{-2}}{a + \sqrt{-3}} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}\,i}{a + \sqrt{3}\,i}$$

$$\therefore\ (a + \sqrt{3}\,i)A = -\sqrt{6} + \sqrt{2}\,i$$

このためAが実数となるとすると，

$$\begin{cases} aA = -\sqrt{6} \\ \sqrt{3}A = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\therefore\ \underline{a = -3,\quad A = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(4) 真数条件より　$x > -1$　を得る．

また　$2\log_4(x+1) - \log_4(x+4) = 1$　より

$$\frac{(x+1)^2}{x+4} = 4$$

$$\therefore\ (x+3)(x-5) = 0$$

このため　$x = -3,\ 5$．

$x > -1$であったから　$\underline{x = 5}$

(5) 方程式 $x^3+ax^2+bx-7=0$ の

整数解を α, β, γ とおく。（$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ とする）

このとき 解と係数との関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-a & \text{—①} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b & \text{—②} \\ \alpha\beta\gamma=7 & \text{—③} \end{cases}$$

③より $(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 1, 7), (-1, -1, 7), (-7, -1, 1)$

このとき ②より，b はそれぞれ $15, -13, -1$ となる。

$b>0$ であるから $(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 1, 7)$

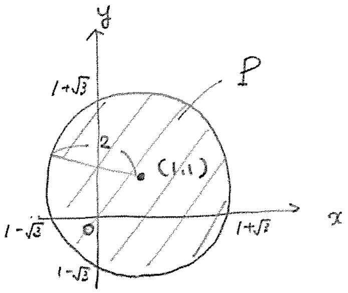
つまり，方程式の解は $\underline{x=1\,(\text{重解}),\ 7}$

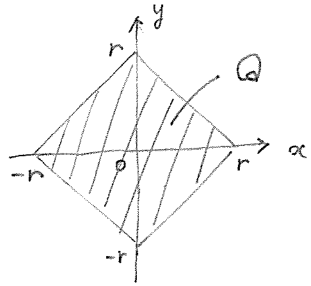
また，①．②より $\underline{a=-9,\quad b=15}$

Ⅱ

(1) 条件 p, q を満たす (x, y) 全体の集合をそれぞれ P, Q とする。

P, Q を図示すると以下の通り



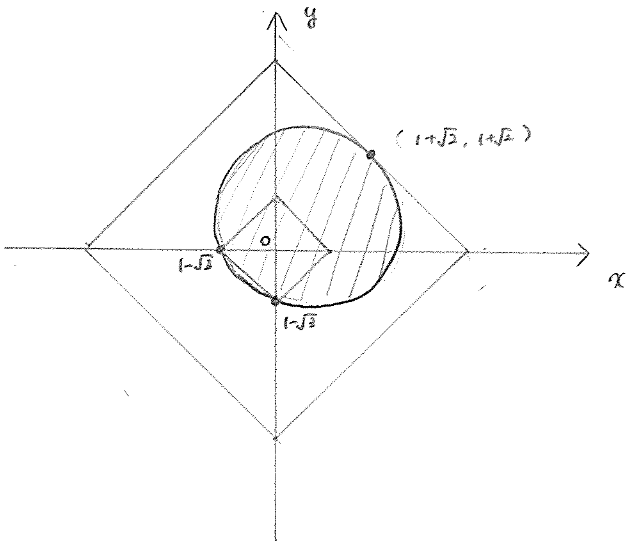


q が p の必要条件となるとき $P \subset Q$ である。

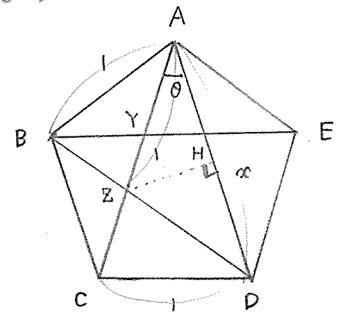
このため $r \geqq 2+2\sqrt{2}$

q が p の十分条件となるとき $P \supset Q$ である

このため $0 < r \leqq \sqrt{3}-1$



(2) 対角線の長さを x とする



$\triangle ABZ$ は二等辺三角形より $AZ = AB = 1$ である

また、$\triangle ACD \backsim \triangle DZC$ であるから、

$AD : CD = CD : ZC$

$\therefore\ x : 1 = 1 : (x-1)$

$\therefore\ x^2 - x - 1 = 0 \qquad \therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$ であるから $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

また、Z から AD におろした垂線の足を H とし

$\triangle AZH$ に着目すると

$\cos\angle CAD = \dfrac{1}{2}x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

また、$YZ = 2 - x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$\begin{cases} a_n = d(n-1)+1 \\ b_n = r^{n-1} \end{cases}$$ である。

$S_n = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ とするとき、

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ -)\ rS_n = & \qquad\quad a_1b_2 + \cdots + a_{n-1}b_n + a_nb_{n+1} \\ \hline (1-r)S_n = & a_1b_1 + db_2 + \cdots + db_n - a_nb_{n+1} \end{array}$$

$$= 1 + d\cdot\frac{r(1-r^{n-1})}{1-r} - (d(n-1)+1)r^n$$

$$= 1 + \frac{dr}{1-r} - \left(\frac{dr}{1-r} + dn + 1\right)r^n$$

特に $d=2$, $r=2$ のとき、

$-S_{10} = -17411$ $\quad\therefore\ S_{10} = 17411$

(4)

$$f_2(\theta) = \cos\theta + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\theta - \sin\theta + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (\sqrt{2}+1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

よって、$0 \leq \theta \leq 2\pi$ では、$\theta = \frac{7}{4}\pi$ のとき

$f_2(\theta)$ は最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる

また、

$$f_4(\theta) = \left(\cos\theta + \cos(\theta+\pi)\right) + \left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)\right) + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 + 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\theta$$

$$= -(\sqrt{2}+1)\sin\theta$$

Ⅲ

(1) $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}+\vec{a_4}=(20,19)$ となるとき

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(5,5,5,5)$

$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(5,5,5,4),(5,5,4,5),$
$(5,4,5,5),(4,5,5,5)$

よって $(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4})$ の組合せは 4通り

このため 求める確率は $\dfrac{4}{6^8}$

(2) $\triangle OA_1A_2$ の重心を G, $\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ とする。

このとき $\vec{g}=\dfrac{1}{3}(\vec{a_1}+\vec{a_2})=\left(\dfrac{x_1+x_2}{3},\dfrac{y_1+y_2}{3}\right)$ である。

(以下 $\triangle OA_1A_2$ が存在しない場合も $G\left(\dfrac{x_1+x_2}{3},\dfrac{y_1+y_2}{3}\right)$ と定める)

$\vec{a_1}$ を1つ定めたとき $\dfrac{x_1+x_2}{3}$, $\dfrac{y_1+y_2}{3}$ がともに整数となる $\vec{a_2}$ は 4通り存在する。

よって $\left(\dfrac{x_1+x_2}{3},\dfrac{y_1+y_2}{3}\right)$ が格子点となる $(\vec{a_1},\vec{a_2})$ は

$36\cdot4=144$ 通り存在する。

ここから $\triangle OA_1A_2$ が存在しないものを除けば良い。

(i) $\vec{a_1}=(0,0)$ のとき

G が格子点となる 4通りの $\vec{a_2}$ すべてについて

$\triangle OA_1A_2$ は存在しない。

(ii) $\vec{a_1}=(0,y_1)$, $y_1\neq0$ のとき

G が格子点となる 4通りの $\vec{a_2}$ のうち

$x_2=0$ となる 2通りについて $\triangle OA_1A_2$ が存在しない。

(iii) $\vec{a_1}=(x_1,0)$, $x_1\neq0$ のとき

G が格子点となる 4通りの $\vec{a_2}$ のうち

$y_2=0$ となる 2通りについて $\triangle OA_1A_2$ は存在しない。

(iv) $x_1=y_1\neq0$ のとき

G が格子点となる 4通りの $\vec{a_2}$ のうち

$x_2=y_2$ となる 2通りについて $\triangle OA_1A_2$ は存在しない

(v) $\vec{a_1}=(1,2),(2,4),(2,1),(4,2)$ のとき

それぞれ $\vec{a_2}=(2,4),(1,2),(4,2),(2,1)$ のとき

$\triangle OA_1A_2$ は存在しない

(i)〜(v) より 求める確率は

$$\frac{1}{6^4}(144-4-5\cdot2-5\cdot2-5\cdot2-4\cdot1)=\frac{53}{648}$$

(3)

(i) $y_1 = 0$ のとき

いかなる $\vec{a_2}$ に対しても $\vec{a_1}$ と $\vec{a_2}$ は1次独立になり得ない。

(ii) $y_1 \neq 0$ のとき

$\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ が1次独立となることは $x_2 \neq 0$ と同値

このため確率は $\frac{5}{6}$

(i)(ii)は互いに排反のため、

求める確率は $\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \underline{\frac{25}{36}}$

(4) $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$ となるのは以下の4つに場合分けされる。

(i) $\vec{a_1} = \vec{a_2} = \vec{0}$ のとき

このような $(\vec{a_1}, \vec{a_2})$ の組は 1通り

(ii) $\vec{a_1} = \vec{0}$, $\vec{a_2} \neq \vec{0}$, または $\vec{a_1} \neq \vec{0}$, $\vec{a_2} = \vec{0}$ のとき

このような $(\vec{a_1}, \vec{a_2})$ は $2 \cdot 35 = 70$ 通り

(iii) $x_1 = y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ のとき

このような $(\vec{a_1}, \vec{a_2})$ は $5^2 = 25$ 通り

(iv) $x_2 = y_1 = 0$, $y_2 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ のとき

このような $(\vec{a_1}, \vec{a_2})$ は $5^2 = 25$ 通り

(i)〜(iv)より 求める確率は

$$\frac{1}{6^4}(1 + 70 + 25 + 25) = \underline{\frac{121}{1296}}$$

(5) $\vec{a_1} = (x_1, y_1)$ を1つ定めたとき

$\vec{a_2}$ は $0 \leq x_2 \leq x_1$, $0 \leq y_2 \leq y_1$ を満たせば良く、

このような $\vec{a_2}$ は $(x_1 + 1)(y_1 + 1)$ 個存在する。

さらにその各々の $\vec{a_2}$ について、

$\vec{a_3} = \vec{a_1} - \vec{a_2}$ となる $\vec{a_3}$ は一意に定まる

以上のことから、$\vec{a_1} = \vec{a_2} + \vec{a_3}$ となる $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ の組は

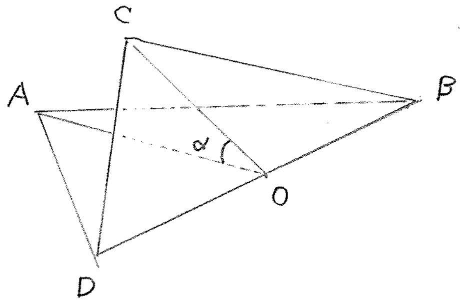
$$\begin{aligned}
&1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot 6 \\
&+ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 6 \\
&\vdots \\
&+ 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + \cdots + 6 \cdot 6 \\
&= 1 \cdot (1 + \cdots + 6) + \cdots + 6(1 + \cdots + 6) \\
&= (1 + \cdots + 6)^2 = 21^2
\end{aligned}$$

個存在する。

よって求める確率は

$$\frac{21^2}{6^6} = \underline{\frac{49}{5184}}$$

Ⅳ



(1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} = 1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \underline{1}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \underline{\frac{1}{2}\cos\alpha}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$

$= \underline{\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}}$

$\angle ABC = 45^\circ$ のとき

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\cdot1\cdot\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より

$\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　$\therefore \cos\alpha = \underline{\sqrt{2}-1}$

(2) $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$ とする.

すると, $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = \sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \frac{3}{4}$ $(\because \alpha = 60^\circ)$　$\vec{a}\cdot\vec{d} = \vec{c}\cdot\vec{d} = 1$ である.

$\overrightarrow{BE} = s\vec{a} + t\vec{c}$ とすると,

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BA} = (s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{d})\cdot\vec{a}$

$= \underline{s + \frac{3}{4}t - 1}$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC} = (s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{d})\cdot\vec{c}$

$= \underline{\frac{3}{4}s + t - 1}$ である

$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BA}$ かつ $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BC}$ のとき

$$\begin{cases} s + \frac{3}{4}t - 1 = 0 \\ \frac{3}{4}s + t - 1 = 0 \end{cases}$$

$\therefore s = t = \underline{\frac{4}{7}}$

V

(1) $y=-ax^2+bx+c \quad (a>0) \qquad C: y=f(x)$

(i) C と x軸 とが 2つの交点をもつための
必要十分条件は $f(x)=0$ の判別式 D が $D>0$ となることである。

$\therefore \quad D=\underline{b^2+4ac>0}$

C の軸は $x=\dfrac{b}{2a}$ より $\underline{g=\dfrac{b}{2a}}$

(ii) $f'(x)=-2ax+b$ である

このことから、l_1 の式は

$y=(-2at+b)(x-t)+f(t)$

$=(-2at+b)x+(at^2+c)$ と分かる。

よって l_1 と y軸との交点の y座標は $\underline{at^2+c}$

また、上の議論は $t<g$ としても成り立つため、
l_2 と y軸との交点の y座標は as^2+c とおける。

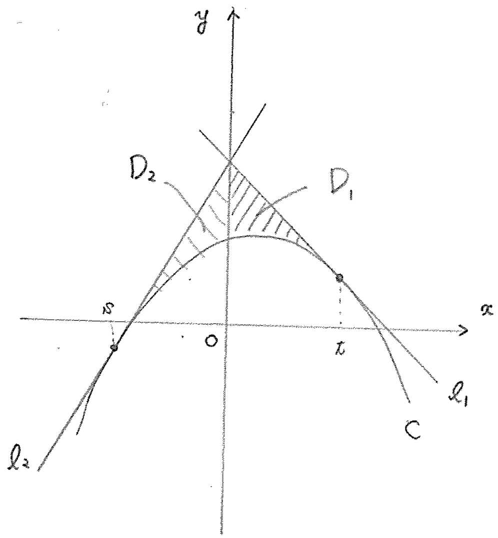
$\therefore \quad as^2+c=at^2+c$

$\therefore \quad a(s-t)(s+t)=0$

$\therefore \quad s=\pm t$

$s\neq t$ であることから $\underline{s=-t}$

(iii)



$D_1=\displaystyle\int_0^t\left\{(-2at+b)(x-t)+f(t)-f(x)\right\}dx$

$=\displaystyle\int_0^t\left\{(-2at+b)(x-t)+(a(x+t)-b)(x-t)\right\}dx$

$=\displaystyle\int_0^t a(x-t)^2\,dx$

$=\left[\dfrac{a}{3}(x-t)^3\right]_0^t=\underline{\dfrac{a}{3}t^3}$

D_1 の計算結果より

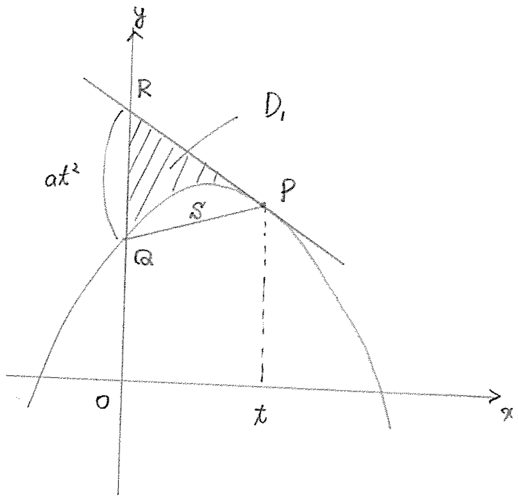
$D_2=\displaystyle\int_s^0\left\{(-2as+b)(x-s)+f(s)-f(x)\right\}dx$

$=-\displaystyle\int_0^s\left\{(-2as+b)(x-s)+f(s)-f(x)\right\}dx$

$=-\dfrac{a}{3}s^3=\underline{\dfrac{a}{3}t^3}$

よって $\dfrac{D_1}{D_2}=1$

＜別解＞



$D_1=\triangle PQR - S$

$=\dfrac{1}{2}at^3-\dfrac{1}{6}at^3 = \dfrac{1}{3}at^3$ と求めても良い

(2)
$$\begin{cases} f_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1 \\ f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2 \end{cases}$$ とおく

このとき $f_1'(x)=2a_1x+b_1$　$f_2'(x)=2a_2x+b_2$ である

よって問題の条件から

$$\begin{cases} c_1=c_2 & \text{―①} \\ b_1=b_2 & \text{―②} \\ 4a_1-2b_1+c_1=5 & \text{―③} \\ 9a_2+3b_2+c_2=0 & \text{―④} \\ a_1>0 \text{ で } -\dfrac{b_1}{2a_1}=-\dfrac{1}{2} & \text{―⑤} \\ a_2<0 \text{ で } -\dfrac{b_2}{2a_2}=2 & \text{―⑥} \end{cases}$$ を得る

①.②より　$c_1=c_2=c$，$b_1=b_2=b$ とおける.

⑤.⑥より　$a_1=b$.　$a_2=-\dfrac{1}{4}b$ となる.

これを③.④に代入し

$$\begin{cases} 2b+c=5 \\ \dfrac{3}{4}b+c=0 \end{cases}$$

つまり　$b=4$.　$c=-3$ となる

このとき　$a_1=4>0$.　$a_2=-1<0$ を満たしている.

以上のことから

$$f_1(x) = 4x^2 + 4x - 3$$

$$f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$y = f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x<0) \\ f_2(x) & (x \geqq 0) \end{cases}$$

のグラフは以下の実線部分