慶應義塾大学　理工学部　2019

I (1)

(i) $f(x) = \sqrt{x}\log x + 1$ とする $(x>0)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\log x + 2)$$ であるから

$f'(x) = 0$ のとき $x = e^{-2}$ であり

$f(x)$ の増減は以下のようになる

x	0	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小 $\frac{e-2}{e}$	$\nearrow$

よって $x>0$ のとき $f(x) \geqq \frac{e-2}{e} > 0$ $(\because e>2)$ である

よって $x>0$ のとき $\sqrt{x}\log x > -1$ □

(ii) x が 0 に十分近いときのみを考えれば良いため、$0<x<1$ として良い

このとき (i) より

$$-1 < \sqrt{x}\log x < 0$$

$$\therefore -\sqrt{x} < x\log x < 0$$ が成り立つ

ここで $\lim_{x\to+0}(-\sqrt{x}) = 0$ であるから

はさみうちの定理より

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$ □

(2) $|z^2-1| = |z-1|\cdot|z+1|$ であるから

条件は
$$\begin{cases} |z-1| = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \\ |z+1| = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
と同値。

$$|z-1|^2 = z\bar{z} - (z+\bar{z}) + 1 = \frac{4-\sqrt{15}}{2}$$

$$|z+1|^2 = z\bar{z} + (z+\bar{z}) + 1 = \frac{4+\sqrt{15}}{2}$$ であるから

$$\begin{cases} |z|^2 + 1 = 2 \\ z+\bar{z} = \dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$ となる。

$\therefore |z| = 1 \quad \mathrm{Re}\, z = \frac{\sqrt{15}}{4}$

このような z は $z = \frac{\sqrt{15}\pm i}{4}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(|x\vec{a}-\vec{p}|^2\right)$

$= \dfrac{d}{dx}\left((x-\cos\theta)^2+(x-\sin\theta)^2\right)$

$= 2(x-\cos\theta)+2(x-\sin\theta)$

$= 4x-2\cos\theta-2\sin\theta$

$= 2(x\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{a}$ である。

このため、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{(x\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{a}}{|x\vec{a}-\vec{p}|^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{1}{|x\vec{a}-\vec{p}|^2}\cdot\left(|x\vec{a}-\vec{p}|^2\right)'\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|x\vec{a}-\vec{p}|^2\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

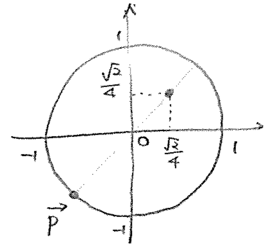
$= \log\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}\vec{a}-\vec{p}\right| \quad (\because |\vec{p}|=1)$ となる。

よってこれは $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}\vec{a}-\vec{p}\right|$ が最大となるとき最大となるが、

θ が実数全体を動くとき、$\vec{p}$ は単位円周上を動くため

$\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}\vec{a}-\vec{p}\right|$ は $\vec{p}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ のとき

最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる

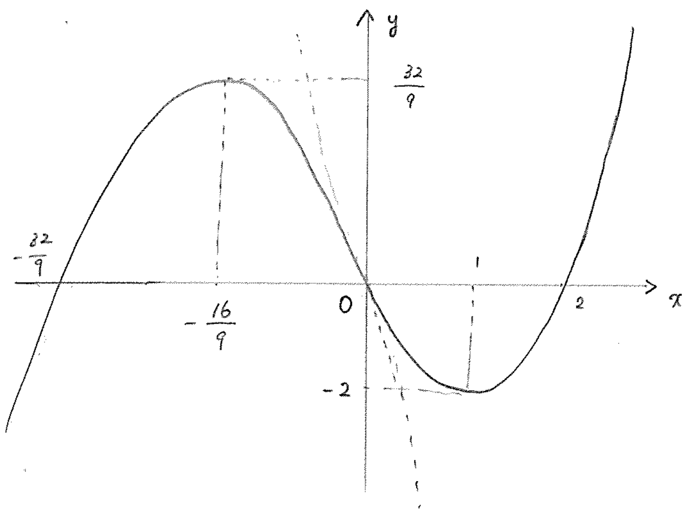


よって、求める最大値は

$\underline{\log 3-\log 2}$

2

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-4x & (x\geqq 0)\\ -\frac{9}{8}x^2-4x & (x<0)\end{cases}$$ のグラフは以下の通りである

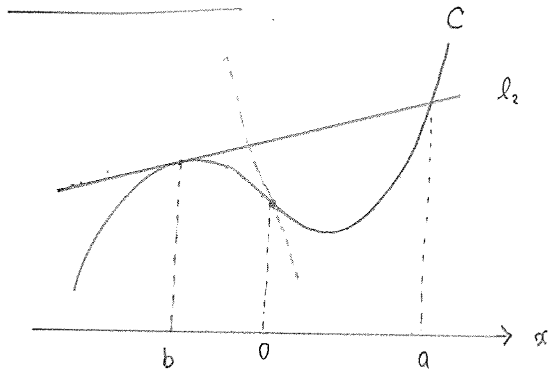


(1) グラフより $f(x)$ は $x=-\frac{16}{9}$ で極大値 $\frac{32}{9}$

$x=1$ で極小値 -2 をとる

よって $\frac{32}{9}+(-2)=\frac{14}{9}$

(2) (i) $a>0$ のとき



$x>0$ の範囲でグラフは下に凸のため $b<0$ である.

∴ $f'(b)=-\frac{9}{4}b-4$ であるから

l_2 : $y-\left(-\frac{9}{8}b^2-4b\right)=\left(-\frac{9}{4}b-4\right)(x-b)$ となる

l_2 が $(a,\ f(a))$ を通るとき, これを代入して

$$(2a^2-4a)-\left(-\frac{9}{8}b^2-4b\right)=\left(-\frac{9}{4}b-4\right)(a-b)$$

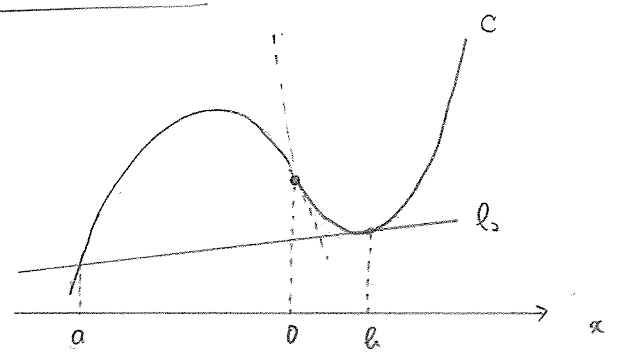
整理して $9b^2-18ab-16a^2=0$

∴ $(3b+2a)(3b-8a)=0$

∴ $b=-\frac{2}{3}a,\ \frac{8}{3}a$

ここで $a>0$ $b<0$ であったから $b=-\frac{2}{3}a$

(ii) $a<0$ のとき



$x<0$ の範囲でグラフは上に凸のため $b>0$ である.

$f'(b)=4b-4$ であるから

l_2 : $y-(2b^2-4b)=(4b-4)(x-b)$ となる

l_2 が $(a,\ f(a))$ を通るとき、これを代入して

$$\left(-\frac{9}{8}a^2-4a\right)-\left(2b^2-4b\right)=(4b-4)(a-b)$$

整理して $16b^2-32ab-9a^2=0$

$$\therefore\ (4b+a)(4b-9a)=0$$

$$\therefore\ b=-\frac{1}{4}a,\ \frac{9}{4}a$$

ここで $a<0$ $b>0$ であったから $\underline{b=-\frac{1}{4}a}$

(3)

l_1 と l_2 が直交するとき $f'(a)f'(b)=-1$ となる.

<u>(i) $a>0$ のとき</u>

$b=-\frac{2}{3}a$ であるから.

$$f'(a)f'(b)=(4a-4)\left(-\frac{9}{4}\left(-\frac{2}{3}a\right)-4\right)$$

$$=6a^2-22a+16=-1$$

$$\therefore\ a=\frac{11\pm\sqrt{19}}{6}$$

<u>(ii) $a<0$ のとき</u>

$b=-\frac{1}{4}a$ であるから

$$f'(a)f'(b)=\left(-\frac{9}{4}a-4\right)\left(4\left(-\frac{1}{4}a\right)-4\right)$$

$$=\frac{9}{4}a^2+13a+16=-1$$

$$\therefore\ a=-\frac{34}{9},\ -2$$

(i)(ii) より <u>最大値は $\frac{11+\sqrt{19}}{6}$ 最小値は $-\frac{34}{9}$</u>

3

(1) 1〜3枚目のうちに箱から取り出されるカードの組合せは

$_6C_3 = 20$ 通りあり。

これらがとられる確率は同様に確からしい。

このうち、3つの連続とした数字の組合せは 4通りある。

よって求める確率は $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ (ケ)

5枚目まで終了しないとき、1〜4枚目にとり出されなかった数字の組合せは $\{1,4\}$、$\{2,4\}$、$\{2,5\}$、$\{3,4\}$、$\{3,5\}$、$\{3,6\}$ の6通りある。また、全体では残るカードの組合せは $_6C_2 = 15$ 通りである。

このため、5枚目まで続く確率は $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

5枚目で必ず終了するから求める確率は $\frac{2}{5}$ (コ)

また、5枚目まで続き、かつ5枚目が2となる確率は

$\frac{2}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$ である

よって求める条件付確率は $\frac{1}{15} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{6}$ (サ)

(2) 以下では 3枚目で終了した場合に 4枚目となるカードをとり出す操作をつけ加えて考える。

まず、とり出された4枚のカードの組合せは $_nC_4$ 通りある

このうち、4つの連続した数字となるものは $n-3$ 通りである。

よって4つの連続した数字をひく確率は $\frac{n-3}{_nC_4}$

さらに 3枚目までに終了していないときには、連続する4つのうち2番目または3番目に大きいカードが4枚目にひかれる

よって求める確率は

$$\frac{n-3}{_nC_4} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{n(n-1)(n-2)}$$ (シ)

4枚目で終了し、かつとり出された数字4つが連続していないとき

この4つのカードの組合せは

$$(n-4)\cdot(n-5) + 2\cdot(n-4) = (n-3)(n-4) \text{ 通り}$$

よってこのようなカードをひく確率は $\frac{(n-3)(n-4)}{_nC_4}$

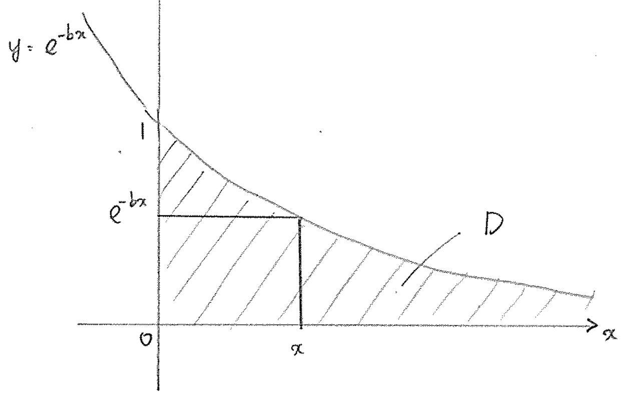
さらに、3枚目までに終了してないときには、連続していない数字が1〜3枚目にひかれる

よって確率は $\frac{(n-3)(n-4)}{_nC_4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$

以上より求める確率は

$$\frac{12}{n(n-1)(n-2)} + \frac{18(n-4)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6(3n-10)}{n(n-1)(n-2)}$$

4



(1) $f(x)=xe^{-kx}$ 　 $f'(x)=(-kx+1)e^{-kx}$ である

よって $f'(x)=0$ のとき $x=\dfrac{1}{k}$

このため $f(x)$ の増減は以下の通り

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↗	極大 $\dfrac{1}{ke}$	↘

よって $f(x)$ は $\underline{x=\dfrac{1}{k}}$ で最大値 $\dfrac{1}{ke}$ をとる.

よって定義により $\underline{a_1=\dfrac{1}{ke}}$

(2) 領域 D 内に含まれ 下側の辺が x 軸上にあり

左側の辺が R_{n-1} の右側の辺上にあり

右下の点の x 座標が x である長方形を考える

この面積を $f_n(x)$ とすると,

$$f_n(x)=(x-p_{n-1})e^{-kx}=e^{-kp_{n-1}}(x-p_{n-1})e^{-k(x-p_{n-1})}$$

$$=e^{-kp_{n-1}}f(x-p_{n-1}) \qquad (\because x>p_{n-1})$$

(1) より, これは $x-p_{n-1}=\dfrac{1}{k}$ となるとき最大となる.

よって定義により $p_n=p_{n-1}+\dfrac{1}{k}$

これより数列 $\{p_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{k}$, 公差 $\dfrac{1}{k}$ の等差数列と分かる.

よって一般項は $\underline{p_n=\dfrac{n}{k}}$

(3)

$$a_n=(p_n-p_{n-1})\cdot e^{-k\cdot p_n}=\frac{e^{-n}}{k} \quad \text{である}$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k}}{k}=\frac{e^{-1}}{k}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}=\underline{\frac{1-e^{-n}}{k(e-1)}}$$

ここで, $|e^{-1}|<1$ に注意すると

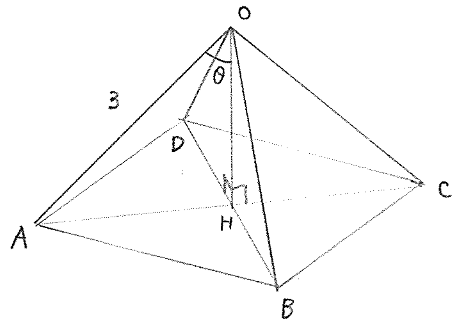
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{k(e-1)} \quad \text{となる.}$$

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=1$ となるとき $\underline{k=\dfrac{1}{e-1}}$

慶早進学塾

5

(1)



$AC = 2AH = \underline{6\sin\theta}$

また、$OH = 3\cos\theta$, $AB = \sqrt{2}\,AH = 3\sqrt{2}\sin\theta$

よって体積 V は

$V = \frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{2}\sin\theta\right)^2\cdot 3\cos\theta = \underline{18\cos\theta\sin^2\theta}$

(2) $t = \cos\theta$ とおく

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < t < 1$ であり

このとき $V = 18t(1-t^2)$ である

$\therefore \frac{d}{dt}V = 18(1-3t^2)$

このため $\frac{d}{dt}V = 0$ のとき $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となり、$(\because 0<t<1)$

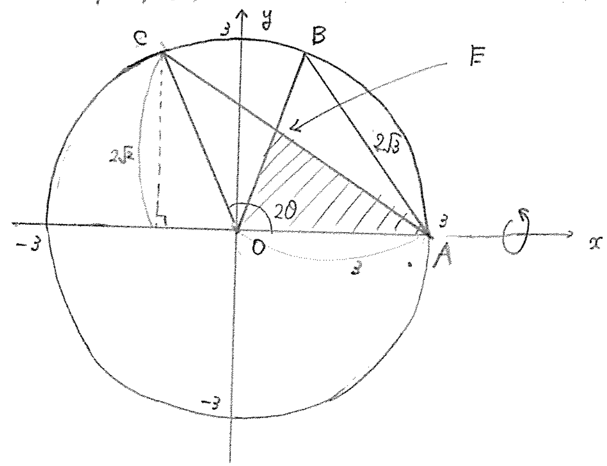
V の増減は以下の通り

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{d}{dt}V$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大 $4\sqrt{3}$	$\searrow$	

よって V の最大値は、$\underline{4\sqrt{3}}$

(3) $V = 4\sqrt{3}$ のとき $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である

OA を回転軸として $\triangle OAC$、$\triangle OAB$ をそれぞれ回転させ重ねると、以下のようになる。



上のように x 軸、y 軸をとると

C の座標は $(3\cos 2\theta, 3\sin 2\theta) = (-1, 2\sqrt{2})$

このため K_1 の体積は $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\pi(2\sqrt{2})^2 = \underline{8\pi}$

また、B の座標は $AB = 2\sqrt{3}$ であることから $(1, 2\sqrt{2})$ と求まる

このため AC と BO の交点を E とおけば

E の座標は $\left(\frac{3}{5}, \frac{6\sqrt{2}}{5}\right)$ と求まる。

K_1 と K_2 の共通部分は $\triangle OAE$ を回転した図形だから

求める体積は $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\pi\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \underline{\frac{72}{25}\pi}$