早稲田大学　政治経済学部　2019

1

(1) $t = \tan\theta$ とする

このとき $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\therefore\ \sin 2\theta = \cos 2\theta \tan 2\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

(2) $t = 5^x$ とおく

このとき $x<1$ より $0<t<5$ である。

また、

$y = -t^3 + 9t^2 - 15t$ となる。（これは任意の実数 t でも定義される）

$\therefore\ \dfrac{dy}{dt} = -3t^2 + 18t - 15$

$= -3(t-1)(t-5)$

よって $\dfrac{dy}{dt} = 0$ のとき $t = 1, 5$ である

$0 \leqq t \leqq 5$ における y の増減は以下の通り

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$\dfrac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-7	↗	25

よって $0<t<5$ のとき $-7 \leqq y < 25$

(3) $\{a_n\}$ を

$\dfrac{1}{2} \,\Big|\, \dfrac{1}{3}\ \ \dfrac{2}{3} \,\Big|\, \dfrac{1}{4}\ \ \dfrac{2}{4}\ \ \dfrac{3}{4} \,\Big|\, \cdots$ と群数列とみなす

第 k 群には k 個の項が含まれる

このことから、第 n 群の初項は、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \dfrac{1}{2}n(n-1) + 1$ 項目であると分かる

ここで $\dfrac{1}{2}\cdot 21\cdot 20 + 1 < 220 < \dfrac{1}{2}\cdot 22\cdot 21 + 1$ である

よって a_{220} は第21群の第10項と分かる

$\therefore\ a_{220} = \dfrac{10}{22}$

慶早進学塾

2

(1) C : $y = x^2$ である.

$y' = 2x$ であるから 点(a, a^2) における

Cの接線の方程式は $y = 2ax - a^2$ である

これが P$(-2, -5)$ を通るとき $-5 = -4a - a^2$.

整理して $(a+5)(a-1) = 0$

∴ $a = -5, 1$

以上より

$l_1 : y = -10x - 25$

$l_2 : y = 2x - 1$

(別) Pを通るCの接線を $y = m(x+2) - 5$ とおく

これはCに接するため

$x^2 - \{m(x+2) - 5\} = 0$. は重解をもつ

よってこの判別式 $D = m^2 + 8m - 20 = 0$

∴ $(m+10)(m-2) = 0$ ∴ $m = -10, 2$.

∴ $l_1 : y = -10x - 25$

$l_2 : y = 2x - 1$

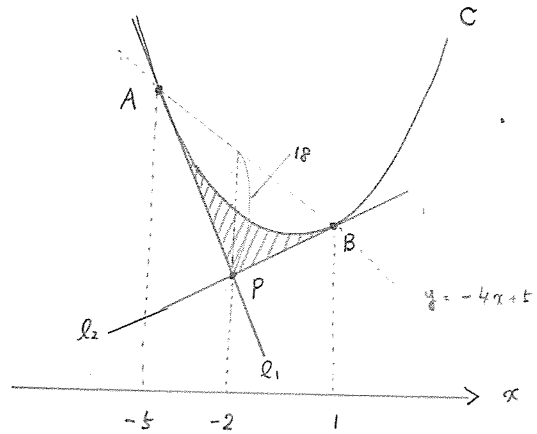
(2)

l_1, l_2 の接点は (1) よりそれぞれ

A$(-5, 25)$ B$(1, 1)$ である

∴ $a = -5$, $b = 1$

(3)



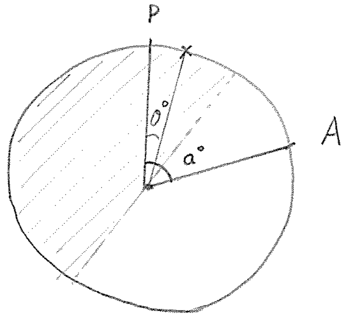
$S = \frac{1}{12}(1-(-5))^3 = 18$

(別) $S = \frac{1}{2}(1-(-5))(13-(-5)) - \frac{1}{6}(1-(-5))^3$

$= 54 - 36 = 18$

3

(1)



店舗 P から時計回りにみた中心角の大きさ $\theta°$ で
環状道路上の位置を表すこととする。 $(0 \leqq \theta < 360)$

顧客は $\begin{cases} 0<\theta<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}+180<\theta<360 \text{ のとき } P \\ \frac{a}{2}<\theta<\frac{a}{2}+180 \text{ のとき } A \end{cases}$ で買い物をする —(*)

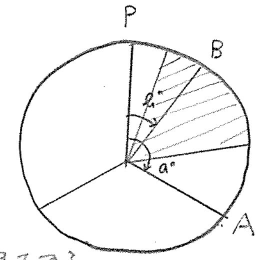
ここで $\theta=\frac{a}{2}$ または $\frac{a}{2}+180$ となる点に顧客がいたとすると、
a が整数であることから $\theta=0$ の点にも顧客がいることとなり
矛盾する。よって背理法よりこの点に顧客はいない。

顧客は 0.1° 間隔で分布するため (*) のそれぞれの範囲に
顧客は 1800 人ずつ存在する。

よって P の売上は $1800 \cdot 1000 = 1800000$
A の売上は $1800 \cdot 1000 = 1800000$

(2)

(i) $0<b<a$ のとき



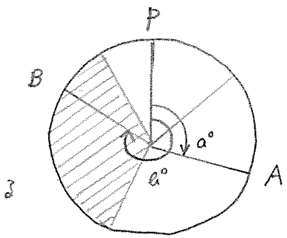
顧客は
$\begin{cases} \frac{b}{2}<\theta<\frac{a+b}{2} \text{ のとき } B \\ \frac{a+b}{2}<\theta<180+\frac{a}{2} \text{ のとき } A \end{cases}$ で買い物をする

よって (1) と同様にして考えると、

A の売上は $\left(180-\frac{b}{2}\right)\cdot 10000 = 1800000-5000b$

B の売上は $\frac{a}{2}\cdot 10000 = 5000a$

(ii) $a<b<360$ のとき



顧客は
$\begin{cases} \frac{a}{2}<\theta<\frac{a+b}{2} \text{ のとき } A \\ \frac{a+b}{2}<\theta<180+\frac{b}{2} \text{ のとき } B \end{cases}$ で買い物をする

よって (1) と同様にして、

A の売上は $\frac{b}{2}\cdot 10000 = 5000b$

B の売上は $\left(180-\frac{a}{2}\right)\cdot 10000 = 1800000-5000a$

ここで、$0<a<180$ のため

$5000a < 1800000 - 5000a$ である

よって 店舗 B は $a<b<360$ のとき

売上が最大値 $1800000-5000a$ をとる

(3)

(2) より 店舗 B の利益は

$$\begin{cases} 0<b<a \text{ のとき} & -1000000+5000a \\ a<b<360 \text{ のとき} & 800000-5000a \end{cases}$$

となる

よって 条件を満たすとき

$$\begin{cases} -1000000+5000a<0 \\ 800000-5000a<0 \end{cases}$$

$\therefore$ $\underline{160<a<180}$ $(\because\ 0<a<180)$

(4)

(2) より A と B の売上の合計は

$$\begin{cases} 0<b<a \text{ のとき} & 1800000+5000(a-b) \\ a<b<360 \text{ のとき} & 1800000-5000(a-b) \end{cases}$$

である

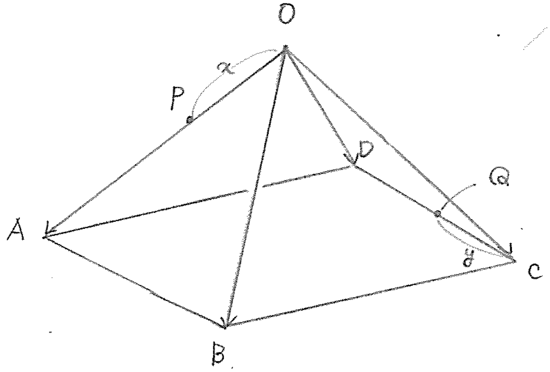
また、条件より $-358 \leqq a-b \leqq 178$ であったから

売上の合計は $\underline{a=1,\ b=359}$ のとき

最大値 3590000 をとる

4

(1)



(1) $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$ より

$$|\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2 \qquad \therefore\ \underline{\vec{a}\cdot\vec{c} = 0}$$

また、

$$\vec{a}\cdot\vec{d} = |\vec{a}||\vec{d}|\cos\frac{\pi}{3} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|\cos\frac{\pi}{3} = \underline{\frac{1}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{OP} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = (1-y)\vec{c} + y\vec{d}$ である

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \underline{-x\vec{a} + (1-y)\vec{c} + y\vec{d}}$$

(3)

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |-x\vec{a} + (1-y)\vec{c} + y\vec{d}|^2$$

$$= x^2|\vec{a}|^2 + (1-y)^2|\vec{c}|^2 + y^2|\vec{d}|^2$$

$$- 2x(1-y)\vec{a}\cdot\vec{c} - 2xy\,\vec{a}\cdot\vec{d} + 2y(1-y)\vec{c}\cdot\vec{d}$$

$$= \underline{x^2 - xy + y^2 - y + 1}$$

(4)

(3) より

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \qquad (0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$$

よって $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は $x = \frac{1}{2}y$, $y = \frac{2}{3}$ のとき最小値をとる.

$|\overrightarrow{PQ}| \geqq 0$ であるから このとき $|\overrightarrow{PQ}|$ も最小となる.

つまり $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ のとき

$\underline{|\overrightarrow{PQ}|\ \text{は最小値}\ \frac{\sqrt{6}}{3}\ \text{をとる}}$

5

(1) 解と係数との関係により，つねに $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$ である．

よって求める確率は $\underline{0}$ である

(2) (1)より α, β が異なる実数となる確率を求めれば良い．

このとき $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D > 0$

$\therefore$ $D = b^2 - 4ac > 0$ となる． —(*)

$a \geqq 1$, $c \geqq 1$ であることから $b = 3, 4, 5, 6$ とわかる

(i) $b = 3$ のとき

(*)を満たす (a, c) の組は

$(a, c) = (1, 1), (1, 2),$
$(2, 1)$

の 3 個

(ii) $b = 4$ のとき

(*)を満たす (a, c) の組は

$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3),$
$(2, 1),$
$(3, 1)$

の 5 個

(iii) $b = 5$ のとき

(*)を満たす (a, c) の組は

$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$
$(2, 1)$ $(2, 2)$ $(2, 3)$
$(3, 1)$ $(3, 2)$
$(4, 1)$
$(5, 1)$
$(6, 1)$

の 14 個

(iv) $b = 6$ のとき

(*)を満たす (a, c) の組は

$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ $(1, 4), (1, 5)$ $(1, 6)$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$
$(3, 1), (3, 2)$
$(4, 1)$ $(4, 2)$
$(5, 1)$
$(6, 1)$

の 16 個

(i)〜(iv)より

求める確率は $\dfrac{1}{6^3}(3 + 5 + 14 + 16) = \underline{\dfrac{19}{108}}$

(3)

(1)(2)より. α, β が異なる実数となる確率は $\dfrac{19}{108}$ である

また. α, β が $\alpha = \beta$ を満たすとき. $D = 0$ より

$$(a, b, c) = (1, 2, 1), (1, 4, 4), (2, 4, 2)$$
$$(4, 4, 1), (3, 6, 3)$$

よって このようになる確率は $\dfrac{5}{6^3} = \dfrac{5}{216}$ である

以上より α, β が虚数となる確率は

$$1 - \frac{19}{108} - \frac{5}{216} = \underline{\frac{173}{216}}$$