慶應義塾大学　商学部　2019

I

(i) $4x^2+\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = 4(x^2-1)+\dfrac{1}{x^2-1}+4$ —(*) である

ここで $x>1$ のとき $x^2-1>0$ であるから、

相加・相乗平均の関係より

$$(*) \geqq 2\sqrt{4(x^2-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}}+4 = 8$$

この等号が成り立つのは $4(x^2-1)=\dfrac{1}{x^2-1}$ のとき

つまり $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときである $(\because x>1)$

よって $4x^2+\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ は $\underline{x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$ で最小値 $\underline{8}$ をとる

(ii)

$$\begin{cases} p+q=7 & —① \\ 3^p\,4^q=32 & —② \end{cases}$$

②の両辺の底を2とする対数をとることにより

$\alpha p+2q=5$ —②′ を得る

①および②′より

$$\underline{p=\frac{9}{2-\alpha} \qquad q=\frac{5-7\alpha}{2-\alpha}}$$

(iii) $b,\ c,\ \dfrac{2}{9}a$ が等差数列であることから

$\dfrac{2}{9}a+b=2c$　$\therefore\ 2a=9(-b+2c)$ を得る —①

9と2とは互いに素であり $-b+2c$ は整数であるから、

a は9の倍数である。

また、a は2以上50以下の偶数でもあったから

$a=18,\ 36$ —②

また、$a,\ b,\ c$ が等比数列であることから

$b^2=ac$

①より $b^2=\dfrac{1}{2}a\left(b+\dfrac{2}{9}a\right)$

$\therefore\ b^2-\dfrac{1}{2}ab-\dfrac{1}{9}a^2=0$

$\therefore\ \left(b+\dfrac{1}{6}a\right)\left(b-\dfrac{2}{3}a\right)=0$

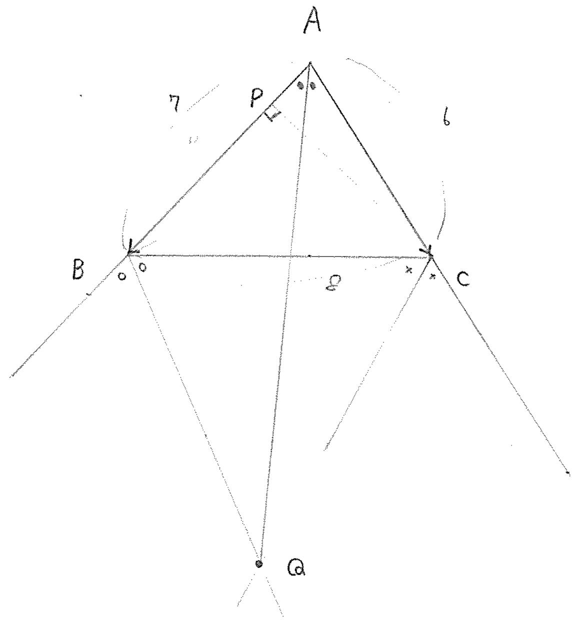
$\therefore\ b=-\dfrac{1}{6}a,\ \dfrac{2}{3}a$

$\therefore\ (a,b,c)=\left(a,\ \dfrac{2}{3}a,\ \dfrac{4}{9}a\right),\ \left(a,\ -\dfrac{1}{6}a,\ \dfrac{1}{36}a\right)$

②より、条件を満たす整数 a,b,c の組は

$$\underline{(a,b,c)=(18,12,8),\ (36,24,16),\ (36,-6,1)}$$

Ⅱ



(i) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ と表す

このとき 条件より $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=6$, $|\vec{b}-\vec{c}|=8$ である

$$\therefore\ |\vec{b}-\vec{c}|^2=64$$

$$\therefore\ |\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=64$$

$$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{21}{2}$$

よって 面積は

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$

$$=\frac{21\sqrt{15}}{4}$$

(ii) P は AB 上の点であるため $\overrightarrow{AP}=k\vec{b}$ (kは実数) とおける

ここで $AB\perp CP$ のため

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=\vec{b}\cdot(k\vec{b}-\vec{c})=0$$

$$\therefore\ 49k-\frac{21}{2}=0 \qquad \therefore\ k=\frac{3}{14}$$

このため $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{14}\overrightarrow{AB}$

次に $\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$ (s, tは実数) とおく

AB の中点を M, AC の中点を N としたとき

$OM\perp AB$, $ON\perp AC$ が成り立つため

$$\begin{cases}(s\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b})\cdot\vec{b}=0\\(s\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c})\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}49s+\frac{21}{2}t-\frac{49}{2}=0\\\frac{21}{2}s+36t-18=0\end{cases}$$

$$\therefore\ s=\frac{44}{105},\quad t=\frac{17}{45}$$

このことから $\overrightarrow{AO}=\frac{44}{105}\overrightarrow{AB}+\frac{17}{45}\overrightarrow{AC}$

(iii) 点Qは $\triangle ABC$ の Aに関する傍心である。

ここで、直線AQと直線BCとの交点をD
直線CQと直線ABとの交点をE とする

Dは線分BCを $7:6$ に内分する点であるから $\overrightarrow{AD}=\frac{6}{13}\vec{b}+\frac{7}{13}\vec{c}$

Eは線分ABを $6:8$ に外分する点であるから $\overrightarrow{AE}=-3\vec{b}$

である

Qは直線AD上の点であるから ある実数 u が存在して

$$\overrightarrow{AQ}=u\overrightarrow{AD}$$ となる

$$\therefore\ \overrightarrow{AQ}=\frac{6}{13}u\vec{b}+\frac{7}{13}u\vec{c}$$

$$=\left(-\frac{2}{13}u\right)\left(-3\vec{b}\right)+\frac{7}{13}u\vec{c}$$

$$=-\frac{2}{13}u\overrightarrow{AE}+\frac{7}{13}u\overrightarrow{AC}$$ となる。

ここで、Qは直線CE上の点でもあったから

$$-\frac{2}{13}u+\frac{7}{13}u=1 \qquad \therefore\ u=\frac{13}{5}$$

以上より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{6}{5}\vec{b}+\frac{7}{5}\vec{c}$$

Ⅲ

(i) 第1グループの男子の数が

0人の確率は $\dfrac{{}_7C_0\cdot{}_5C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{1}{22}$

1人の確率は $\dfrac{{}_7C_1\cdot{}_5C_2}{{}_{12}C_3}=\dfrac{7}{22}$

2人の確率は $\dfrac{{}_7C_2\cdot{}_5C_1}{{}_{12}C_3}=\dfrac{21}{44}$

3人の確率は $\dfrac{{}_7C_3\cdot{}_5C_0}{{}_{12}C_3}=\dfrac{7}{44}$

(ii)

第1グループも第2グループも男子の数が1人の確率は

$$\frac{7}{22}\cdot\frac{{}_6C_1\cdot{}_3C_2}{{}_9C_3}=\underline{\frac{3}{44}}$$

第2グループの男子の数が1人の確率は

$$\frac{1}{22}\cdot\frac{{}_7C_1\cdot{}_2C_2}{{}_9C_3}+\frac{7}{22}\cdot\frac{{}_6C_1\cdot{}_3C_2}{{}_9C_3}+\frac{21}{44}\cdot\frac{{}_5C_1\cdot{}_4C_2}{{}_9C_3}+\frac{7}{44}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_5C_2}{{}_9C_3}$$

$$=\underline{\frac{7}{22}}$$

(別) 第2グループの男子の数が1人の確率 p は

$$p=\sum_{k=0}^{3}\frac{{}_7C_k\ {}_5C_{3-k}}{{}_{12}C_3}\cdot\frac{{}_{7-k}C_1\ {}_{2+k}C_2}{{}_9C_3}$$

$$=\frac{1}{{}_{12}C_3\cdot{}_9C_3}\sum_{k=0}^{3}\frac{7!\cdot 5!\cdot\cancel{(7-k)!}\,\cancel{(2+k)!}}{k!\,\cancel{(7-k)!}\,(3-k)!\,\cancel{(2+k)!}\,1!\,(6-k)!\,2!\,k!}$$

$$=\frac{{}_7C_1\cdot{}_5C_2}{{}_{12}C_3\cdot{}_9C_3}\sum_{k=0}^{3}\frac{6!}{k!\,(6-k)!}\cdot\frac{3!}{(3-k)!\,k!}$$

$$=\frac{{}_7C_1\cdot{}_5C_2}{{}_{12}C_3\cdot{}_9C_3}\sum_{k=0}^{3}{}_6C_k\cdot{}_3C_{3-k}$$

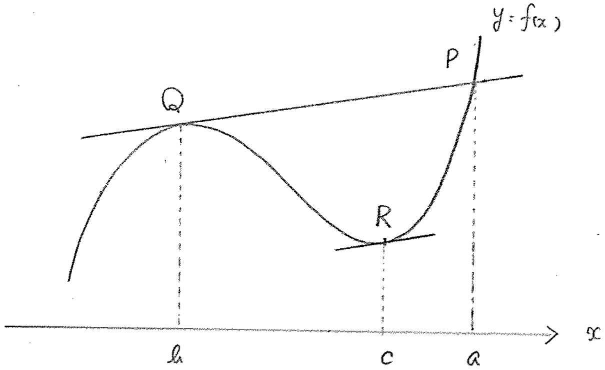
$$=\frac{{}_7C_1\cdot{}_5C_2}{{}_{12}C_3\cdot\cancel{{}_9C_3}}\cdot\cancel{{}_9C_3}=\underline{\frac{7}{22}}$$

(iii)

(ii)より求める条件付確率は

$$\frac{3}{44}\cdot\frac{22}{7}=\underline{\frac{3}{14}}$$

IV



(i)

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 14$ である.

$y = f(x)$ の点 Q における接線の方程式を $y = mx + n$ とする.

このとき

$f(x) - (mx + n) = (x - b)^2 (x - a)$ が成り立つ

この x^2 の係数を比較することにより

$-(2b + a) = -12$ $\quad \therefore \ \underline{b = -\frac{1}{2}a + 6}$

ただし $a \neq b$ であったから $\underline{a \neq 4}$ でなくてはならない

(ii)

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$ である

ここで条件より $b \neq c$ であり $f'(b) = f'(c)$ である

このため x の2次方程式 $f'(x) - f'(b) = 0$ は

異なる2つの解 $x = b, c$ をもつ.

よって解と係数との関係より

$b + c = 8$ $\quad \therefore \ c = 8 - b$

$= \underline{\frac{1}{2}a + 2}$ $\quad$ ($a \neq 4$ より $b \neq c$ を満たす)

(iii)

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}a+6}^{\frac{1}{2}a+2} \left\{ (x-4)^3 - 12(x-4) + 2 \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-4)^4 - 6(x-4)^2 + 2(x-4) \right]_{-\frac{1}{2}a+6}^{\frac{1}{2}a+2}$$

$$= \underline{2(a-4)}$$

(別) $t = x - 4$ とすると

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}a+2}^{\frac{1}{2}a-2} (t^3 - 12t + 2)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}a-2} 2\,dt$$

$$= \underline{2(a-4)}$$