早稲田大学　商学部・2019

1

(1) 一般に、実数 a, b に対し

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\theta_0) \quad \text{である}$$

(ただし $\sin\theta_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ をみたす)

このため θ が実数全体を動くとき、

$$|a\cos\theta + b\sin\theta| \leqq \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{がいえる}$$

よって

$$|2\cos\alpha\sin\beta + 3\sin\alpha\sin\beta + 4\cos\beta|$$

$$= |(2\cos\alpha + 3\sin\alpha)\sin\beta + 4\cos\beta|$$

$$\leqq \sqrt{(2\cos\alpha+3\sin\alpha)^2 + 4^2}$$

$$\leqq \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29} \quad \text{である}$$

特に、$-\sqrt{29} \leqq 2\cos\alpha\sin\beta + 3\sin\alpha\sin\beta + 4\cos\beta$ となる

等号は $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{29}}$, $\sin\beta = -\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$ となるような α, β で成立する

よって求める最小値は $\underline{-\sqrt{29}}$

(2) $f(f(x)) = x$ となる実数 x に対し $y = f(x)$ とおく

すると

$$\begin{cases} y = f(x) = x^2 + a & \text{—①} \\ x = f(y) = y^2 + a & \text{—②} \end{cases} \quad \text{である}$$

①, ②より

$$y - x = x^2 - y^2$$

$$\therefore (y-x)(y+x+1) = 0$$

$$\therefore y = x,\ -x-1 \quad \text{となる}$$

よって $f(f(x)) = x$ が丁度2つの異なる実数解をもつとき、2つの方程式 $f(x) = x$, $f(x) = -x-1$ はあわせて丁度2つの異なる実数解をもつ。

ここで,

$(x^2+a)-x=0$ は 判別式 $D_1=1-4a$ である.

このため
$$\begin{cases} a>\frac{1}{4} & \text{のとき } 0\text{つ} \\ a=\frac{1}{4} & \text{のとき } 1\text{つ} \\ a<\frac{1}{4} & \text{のとき } 2\text{つ} \end{cases}$$
の実数解をもつ

また,

$(x^2+a)-(-x-1)=0$ は 判別式 $D_2=1-4(a+1)$ である

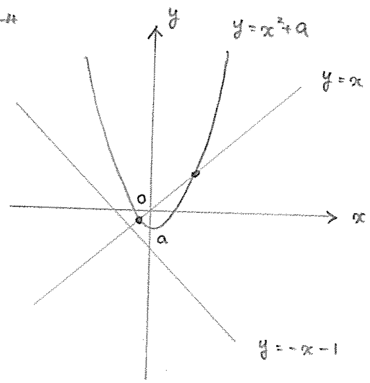
このため
$$\begin{cases} a>-\frac{3}{4} & \text{のとき } 0\text{つ} \\ a=-\frac{3}{4} & \text{のとき } 1\text{つ} \\ a<-\frac{3}{4} & \text{のとき } 2\text{つ} \end{cases}$$
の実数解をもつ

さらに, この2つの方程式が共通解をもつとき, $x=-x-1$.

つまり 共通解は $x=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{3}{4}$ である.

以上のことから, 求める範囲は

$$-\frac{3}{4} \leqq a < \frac{1}{4}$$



(3) $\int_1^x P(t)\,dt = Q(x)$ とおく.

このとき $Q(x)$ も整式である. また, 条件より
$$\begin{cases} Q'(1)=P(1)=1 & -① \\ Q(1)=0 & -② \\ xQ(x)=(x-2)Q(x+1) & -③ \end{cases}$$
である

③より, $n\geqq 3$ となる自然数 n に対して

$$Q(n+1)=\frac{n}{n-2}Q(n)$$
となる.

つまり $n\geqq 5$ のとき

$$Q(n)=\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n-2}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{1}Q(3)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}Q(3) \quad (n=3,4 \text{でも成立})$$

$Q(x)$ は整式であったから $Q(x)=\frac{1}{2}Q(3)(x-1)(x-2)$

(因数定理から, $n\geqq 3$ なる任意の自然数について

$Q(x)-\left(\frac{1}{2}Q(3)(x-1)(x-2)\right)$ は $(x-n)$ を

因数にもつ.

このため $Q(x)-\frac{1}{2}Q(3)(x-1)(x-2)=0$ でなくてはならない.)

このとき、① より $Q(3) = -2$

$\therefore\ Q(x) = -(x-1)(x-2)$

$\therefore\ P(x) = Q(x)' = \underline{-2x+3}$

(4)

$A = (5+2\sqrt{5})^{2019}$

$B = (5-2\sqrt{5})^{2019}$ とおく。

2項定理より

$$A+B = \left\{5^{2019} + {}_{2019}C_1 (2\sqrt{5}) 5^{2018} + \cdots + (2\sqrt{5})^{2019}\right\} + \left\{5^{2019} - {}_{2019}C_1 (2\sqrt{5}) 5^{2018} + \cdots - (2\sqrt{5})^{2019}\right\}$$

$$= 2\cdot 5^{2019} + 2\cdot {}_{2019}C_2\ 20\cdot 5^{2017} + \cdots + 2\cdot {}_{2019}C_{2018}\ 20^{1009}\cdot 5$$

となるため、$A+B$ は整数であると分かる。

ここで、$1 \leqq k \leqq 1009$ において

$20^k \cdot 5^{2019-2k} = 100 \cdot 20^{k-1} \cdot 5^{2018-2k}$ であり、

$20^{k-1} \cdot 5^{2018-2k}$ は整数であるから、

$20^k \cdot 5^{2019-2k}$ は 100 の倍数である。

よって $A+B$ を 100 でわった余りは $2\cdot 5^{2019}$ を 100 でわった余りに等しく $2\cdot 25 = 50$ である

また、$0 < 5-2\sqrt{5} < 1$ であるから、

$0 < B < 1$ であることに注意すると、

$A+B-1 < A < A+B$

よって $n = A+B-1$ である。

このため n を 100 でわった余りは $50-1 = \underline{49}$

(＊) について

5^k を 100 でわった余り a_k は

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$a_k = 1, 5, 25, 25, 25, \ldots$ となる

2

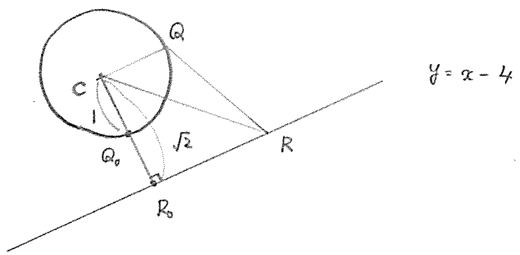
(1) $(3,1)$ と直線 $y=x-4$ との距離は

$$\frac{|3-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2} \quad \text{である}$$

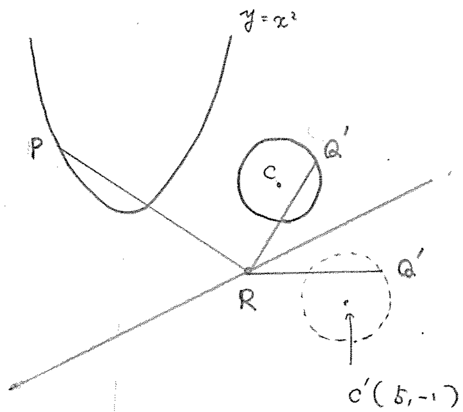
よって C $(3,1)$ とすると，三角不等式により

$$QR \geqq |CR - CQ| \geqq \sqrt{2}-1$$

よって QR の最小値は $\underline{\sqrt{2}-1}$ である



(2)



放物線と円は直線に対し同じ側にある

ここで，$y=x-4$ に関して Q と対称な点を Q' とすると，

$$PR+QR = PR+Q'R \geqq PQ' \quad \text{である。}$$

このため PQ' の最小値が PR + QR の最小値である

また，C と $y=x-4$ に関して対称な点は C' $(5,-1)$ である

よって Q' は円 $(x-5)^2+(x+1)^2=1$ 上の点である

このため (1) と同様にして $PQ' \geqq PC'-1$ と分かる

このため PC' の最小値を求めれば良い。

$P(x, x^2)$ とおく。このとき

$$(PC')^2 = (x-5)^2+(x^2+1)^2$$
$$= x^4+3x^2-10x+26$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left((PC')^2\right) = 4x^3+6x-10$$
$$= 2(x-1)(2x^2+2x+5)$$

よって $x=1$ のときこれは 0 になる

また，$2x^2+2x+5 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2} > 0$ となるため．

$(PC')^2$ の増減は以下の通り

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{d}{dx}(PC')^2$	$-$	0	$+$
$(PC')^2$	$\searrow$	極小 20	$\nearrow$

よって $x=1$ のとき $(PC')^2$ は最小値 20 をとる.

$PC'>0$ より このとき PC' も最小値 $2\sqrt{5}$ をとる

以上のことから

$PR+QR$ の最小値は $\underline{2\sqrt{5}-1}$ である

3

(1) $a_4 - 4^2$ は 5の倍数であるから

a_4 を 5でわった余りは 4^2 を 5でわった余りに等しい

よって $\underline{1}$ である

(2) (ii)により、a_n を 5でわった余りは

n を 5でわった余りが 0, 1, 2, 3, 4 のとき、

それぞれ 0, 1, 4, 4, 1 となることがわかる。

また、(i)により 正の整数 k に対して

$$a_{5k+1} \geq a_{5k} + 1$$

$$a_{5k+2} \geq a_{5k} + 4$$

$$a_{5k+3} \geq a_{5k} + 9$$

$$a_{5k+4} \geq a_{5k} + 11$$

$$a_{5(k+1)} \geq a_{5k} + 15$$

となることがいえる。

これは $a_0 = 0$ と定めると $k = 0$ でも成り立つ

よって

$a_{5k} \geq 15k$ となる。

このため

$$a_{2019} \geq a_{2015} + 11 \geq 3 \cdot 2015 + 11 = 6056$$

である。しかし (iii)より $a_{2019} = 6056$ であるから

これを満たすには $0 \leq k \leq 403$ となる整数 k に対しては

$$\begin{cases} a_{5k} = 15k \\ a_{5k+1} = 15k + 1 \\ a_{5k+2} = 15k + 4 \\ a_{5k+3} = 15k + 9 \\ a_{5k+4} = 15k + 11 \end{cases} \quad \text{—(*)}$$

でなくてはならない。

ここで $a_n = 2021$ とする。

$a_n < a_{2019}$ より $n < 2019$ である

また $a_n = 2021 = 15 \cdot 134 + 11$ であるから、

(*)より $n = 5 \cdot 134 + 4 = \underline{674}$ とわかる